COLEGIO SAN RAFAEL I.E.D.
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN DE BOGOTÁ, D. C.

GUÍA	**N° 4**	
ASIGNATURA	**MATEMÁTICAS**	
GRADO	**OCTAVO**	
PERIODO ACADÉMICO	**IV PERÍODO**	
DOCENTES	CLARENA ARANDA (801-802 JM)	**claranda74@gmail.com** **caranda@educacionbogota.edu.co**
	RICARDO MORA (803 JM)	**fmoram@educacionbogota.edu.co** **https://profericardomora.blogspot.com/** **WhatsApp 3212829382**
	FERNANDO JIMÉNEZ (801-802 JT)	**profefernandojimenez@hotmail.com** Https://Hedwyn.blogspot.com **WhatsApp 3124162047**
DESEMPEÑO DEL PERIODO	Plantea modelos algebraicos, gráficos o numéricos en los que se identifican variables y rangos de variación de las variables, a través de un trabajo comprometido e impecable	
INDICACIONES GENERALES:	➢ Presentar todos los talleres propuestos de forma ordenada **1. Toma apunte del primer ítem o pregunta a mano en su cuaderno** **2. Realiza las operaciones aritméticas, lógicas o de orden necesarias** **3. Explica porque dicho proceso es necesario y es el mejor** **4. Escribe la respuesta de forma clara y concisa** ➢ Organiza lo anterior en un archivo pdf **(donde las imágenes deben estar organizadas iniciando en el punto 1, y continuar secuencialmente),** completa, y con buena caligrafía y ortografía que demuestren ser de este grado. ➢ **En su cuaderno de matemáticas, la primera hoja en cada periodo debe ser una marcación que incluya claramente los datos de contacto de Padres y del Estudiante** (Teléfonos y Correos electrónicos). Una imagen de la marcación se envía con el taller número uno. ➢ **Presentar oportuna y puntualmente las actividades propuestas por eldocente las cuales deben estar resueltas en el cuaderno y entregadas según las fechas indicadas en el cronograma.** ➢ **Participar de la mayor cantidad posible y con la mejor disposición de los encuentros presenciales o virtuales programados por la institución y por cada docente.**	

	Actividad	**Tema**	**Fecha de Entrega**
CRONOGRAMA DE ENTREGA DE LAS ACTIVIDADES	Taller 1	**Página 222**	**30 de septiembre**
	Taller 2	**Páginas 230 y 231**	**22 de Octubre**

EVALUACIÓN Y VALORACIÓN:	Valoración de los trabajos presentados, resultados obtenidos en los QUIZ, **asistencia y participación respetuosa y activa durante los encuentros**, otras evaluaciones que programe el docente, y la autoevaluación y heteroevaluación.

DESARROLLO DE CONTENIDOS Y ACTIVIDADES			
Actividad	**Subtema**	**Vídeo de apoyo**	
Taller 1	**Combinatoria y probabilidad**	**Combinatoria**	https://www.youtube.com/watch?v=ec8TQjfQrGY
		Factoriales	https://www.youtube.com/watch?v=T8b8CYdL-4M
		Combinatoria – Variación y Permutación	https://www.youtube.com/watch?v=h4IfRXoVcpo
Taller 2	**Cálculo de probabilidades**	**Probabilidad**	https://www.youtube.com/watch?v=xYco67hkECs

COLEGIO SAN RAFAEL I.E.D.
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN DE BOGOTÁ, D. C.

NOMBRE_____**CURSO**_____ **PERIODO CUARTO**

AUTOEVALUACIÓN

Recuerde ser muy honesto en su calificación. Sume los puntajes parciales y divida entre cinco, para obtener la valoración final.

DESEMPEÑO	***VALORACIÓN*** *Entre 2 y 20*	***JUSTIFICACIÓN***
Busco estrategias para estar en contacto con el docente y así poder entregar las actividades asignadas.		
Hago uso de las competencias adquiridas para continuar con el proceso de aprendizaje de la asignatura de manera autónoma y responsable		
Me apropio de los diferentes elementos o materiales de trabajo virtual que me brinda el docente en el desarrollo de la asignatura (documentos, videos, encuentros y otros).		
Comparto mis saberes con mis compañeros, valorando las ideas de los demás, cumpliendo con las normas de etiqueta virtual.		
Tengo buena disposición para participar en los encuentros y diversos tipos de comunicación virtuales propuestos en la asignatura, reconociendo lo que me favorece en la apropiación del conocimiento.		

Combinatoria y probabilidad

En la actualidad, se ha hecho familiar el empleo de técnicas estadísticas para el estudio de los problemas sociales. Una de ellas es la teoría de las probabilidades que se caracteriza por el amplio campo de aplicaciones que posee, el cual se extiende a todas las ramas de las ciencias naturales, la tecnología y las ciencias sociales. Esto se debe a que la teoría de las probabilidades permite estudiar y "medir" la **incertidumbre** que forma parte de casi todo lo que ocurre a nuestro alrededor, hacer predicciones y tomar decisiones.

La mayoría de los problemas que se interesan por las probabilidades pueden formularse con muy poca herramienta matemática y, en ocasiones, resultan pintorescos y hasta graciosos.

Como es necesario aplicar conceptos de factorial y combinatoria, para resolver situaciones de probabilidades, entonces estudiaremos estos aspectos en esta unidad.

Tema 1.
Combinatoria

Indagación

Lucy quiere adquirir varios vestidos pero armados con pocas prendas, así que adquiere 3 blusas y 2 faldas.

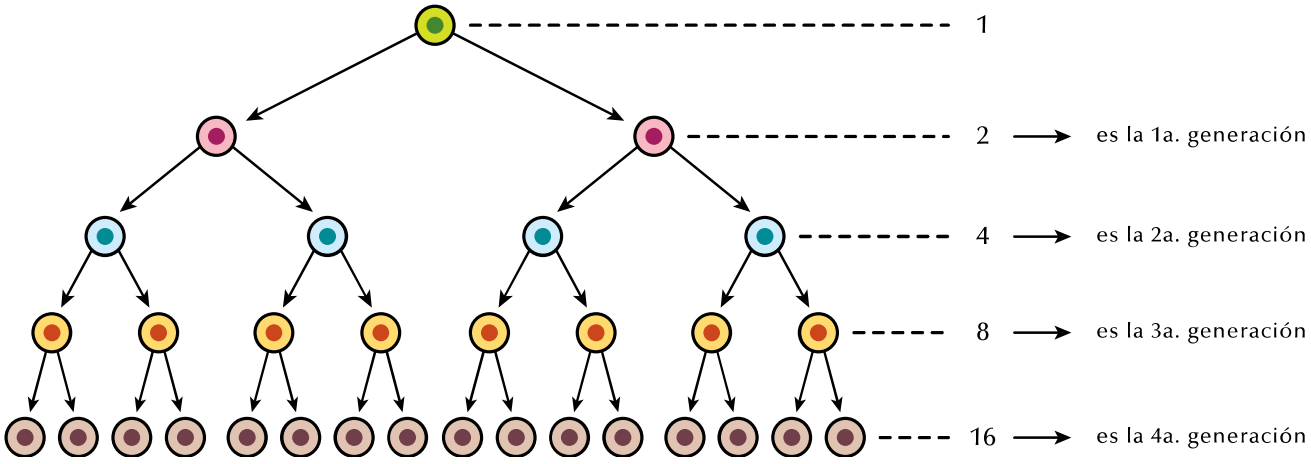
Como Lucy quiere saber cuántos vestidos (falda-blusa) podrá formar, ayudémosle a realizar las combinaciones.

Conceptualización
Crecimientos exponenciales

En la naturaleza existen fenómenos que tienen un modelo matemático, especialmente en cuanto a progresiones se refiere. Como ejemplo presentamos lo siguiente:

La mitosis o cariocinesis es un proceso de reproducción celular, mediante el cual una célula reparte por igual la sustancia nuclear, llamada cromatina, en sus dos hijas resultantes; a su vez, cada una de ellas repite el proceso.

Lo anterior se puede ilustrar en la siguiente figura:



Los números de células totales de cada generación muestran un crecimiento exponencial:

1, 2, 4, 8, 16, 32...

Pero ¿qué es un crecimiento exponencial?

Para definirlo, primero se conocerá qué es una progresión geométrica.

Llámese **progresión geométrica** a una serie de términos, tales que cada uno de ellos es igual al que le precede, multiplicado por una cantidad constante llamada **razón de la progresión** o **razón aritmética**.

Entonces, definimos de manera concreta la sucesión o progresión geométrica así:

Una sucesión geométrica es una secuencia de elementos en la que cada uno de ellos se obtiene multiplicando el anterior elemento por una constante denominada razón o factor de la progresión.

Así por ejemplo:

La progresión 5, 15, 45, 135, 405,... es una progresión geométrica cuyo número que multiplica cada término es 3: a 3 se le llama razón. Veamos que:

$$15 = 5 \times 3$$
$$45 = 15 \times 3$$
$$135 = 45 \times 3$$
$$405 = 135 \times 3$$

y así sucesivamente.

Una progresión geométrica es creciente cuando la razón es mayor que 1 y decreciente cuando la razón es menor que 1.

Veamos unos ejemplos:

1. Observemos la progresión 1, 4, 16, 64, 256,...Aquí no se cumple una razón de suma sino de multiplicación, por lo tanto la progresión 1, 4, 16, 64,256,... es una progresión creciente y su razón es 4, porque cada número es el cuádruplo del anterior.

2. Dada la progresión 81, 27, 9, 3, 1, 1/3,... Esta es una progresión decreciente; su razón es 1/3,porque cada número es la tercera parte del anterior.

Retomando el caso del proceso de reproducción celular, la variación de los números totales de cada generación de células puede presentarse en la tabla siguiente:

Generaciones	Número de células	Crecimiento	Número de células de la siguiente generación
	1	x2	2
1ª	2	x2	4
2ª	4	x2	8
3ª	8	x2	16
4ª	16	x2	32

T_1 = Primer término
T_2 = Segundo término
T_3 = Tecer término
T_4 = Cuarto término
T_5 = Quinto término

Observa el crecimiento de la progresión de la última columna.

$$T_1 \times R = T_2 \quad ; \quad T_2 \times R = T_3$$
$$2 \times 2 = 4 \quad\quad 4 \times 2 = 8$$

Si T_1 = primer término, T_2 = segundo término,… y R = crecimiento, entonces puede decirse que:

- El primer término por el crecimiento es igual al segundo término, el segundo término por elcrecimiento es igual al tercer término, y así sucesivamente.
- Esta progresión es un ejemplo de crecimiento exponencial.

Ahora, como ya comprendemos qué es una progresión o sucesión geométrica, podemos definir crecimiento exponencial:

Crecimiento exponencial es la progresión que aumenta por multiplicación de una cantidad constante llamada razón.

Índices

Un número índice o índice es una medida estadística diseñada para expresar variaciones en una variable o en un grupo de variables relacionadas con respecto al tiempo. Estas variaciones que se representan en tantos por cientos son una referencia para la elaboración de tablas o gráficas.

Por tanto, se puede hablar de muchos ejemplos de índices.

Los más comunes son:

a) índices de precios
b) índices de compras
c) índices de calidad
d) índices de empleos u ocupación

Los **índices de precios** son aquellos que muestran el porcentaje de cambio en el precio de algún producto o artículo comercial, en un período determinado.

Analicemos:

1. Con el objeto de ejemplificar lo anterior, supongamos que se tiene un artículo cualquiera (bolsa, hamaca, etc.), cuyo precio tuvo variación durante los últimos cinco años, por lo cual se requiere determinar el índice comparativo de precios de cada uno de estos años, tomando como periodo base 1989. El precio de ese año se considera como 100 %.

Veamos la siguiente tabla:

Tabla de índices		
Años	Precio pagado	Índice de precios
Periodo base → 1989	13,000	100
1990	9,000	↑ ***Índice de precios para el periodo base***
1991	8,000	
1992	10,000	
1993	12,000	

Para determinar el índice de precios de cada año en la tabla, se puede establecer una expresión que relacione el precio pagado con el precio base expresado en porcentaje.

Esta expresión nos permite establecer el índice de precios, así:

$$I_{pn} = (\text{Indice de precio}) = \frac{\text{Precio pagado}}{\text{Precio base}} = X\ 100$$

Para encontrar el índice de precios de 1991, 1992 y 1993, se procede de la siguiente manera:

a. $$I_{pg1} = \frac{8,000}{13,000} = X\ 100 = 61.5$$

En donde el precio pagado del año 1991 fue $8,000 y el precio base de 1989 fue $13,000.

Para los otros dos años (1992 y 1993), el índice de precios corresponde a:

b. $$I_{pg2} = \frac{10,000}{13,000} = X\ 100 = 76.9$$

c. $I_{pg3} = \frac{12{,}000}{13{,}000} = X\ 100 = 92.3$

Podemos reunir estos valores en una tabla, así:

Tabla de índices		
Años	Precios	Índices de precios
1989	13,000	**100**
1990	9,000	69,2
1991	8,000	61,5
1992	10,000	76,9
1993	12,000	92,3

Al observar la tabla, es notorio que el precio del artículo descendió en 1990 en un 30 %, aproximadamente, con respecto al año base. El descenso continuó en 1991 y mostró una recuperación en 1992 y 1993, sin llegar a la situación que se tenía en 1989. Esto puede obedecer a que bajó la demanda de ese artículo, a que disminuyó la calidad del producto o a otros factores.

2. El siguiente ejemplo muestra cómo calcular **índices de compra**. En este caso, se relaciona unacompra diaria de un cierto producto, durante una semana con la compra total.

Don Simón se dedica a vender dulces, por lo cual realiza sus compras de azúcar en la semana, de la siguiente manera:

Como puede observarse, el total de kilogramos de azúcar comprados durante la semana es de 450; pues bien, con base en las compras efectuadas por don Simón, se debe determinar el índice de las compras diarias en una tabla y representarlas en una gráfica.

Días	Kg de azúcar
Lunes	50
Martes	30
Miércoles	45
Jueves	60
Viernes	80
Sábado	90
Domingo	95

$$\text{Índice de compra} = I_c = \frac{\text{Compra de un día}}{\text{Total de compra}} = X\ 100$$

Así para la compra del lunes, se tiene: $I_c = \frac{50}{450} \times 100 = 11\,\%$

Y así sucesivamente, se obtienen los demás índices de compra:

martes $I_c = \frac{30}{450} \times 100 = 0.7\,\%$

miércoles $I_c = \frac{45}{450} \times 100 = 10\,\%$

jueves $I_c = \frac{60}{450} \times 100 = 13\,\%$

viernes $I_c = \frac{80}{450} \times 100 = 18\,\%$

sábado $I_c = \frac{90}{450} \times 100 = 20\,\%$

domingo $I_c = \frac{95}{450} \times 100 = 21\%$

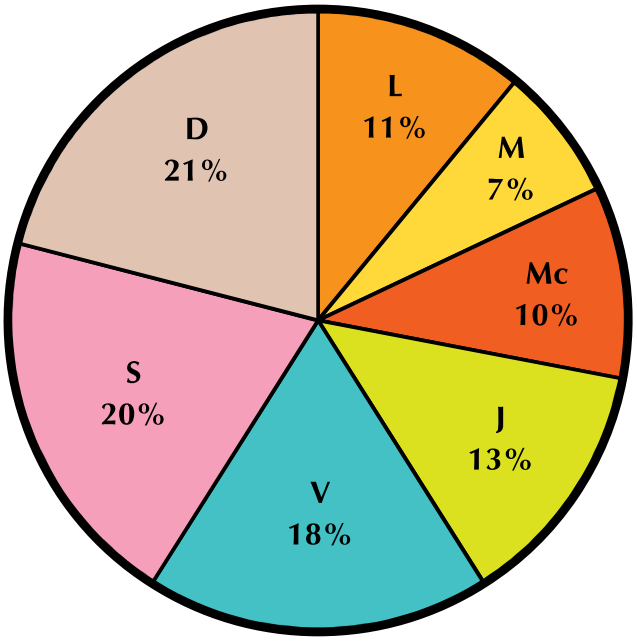
Una vez realizados los cálculos correspondientes, se puede hacer la tabla de índices:

Días	Kg de azúcar	Índices de compras (%)
Lunes	50	11
Martes	30	07
Miércoles	45	10
Jueves	60	13
Viernes	80	18
Sábado	90	20
Domingo	95	21
Totales	450 kg	100%

La tabla muestra qué tanto por ciento del total de las compras (450 kg) se realizó cada día: 11 % el lunes, 18 % el viernes, 21 % el domingo, etc.

Los datos que se muestran en la tabla se pueden representar en una gráfica circular, anotando el índice o tanto por ciento obtenido para cada día.

De la siguiente manera quedan representadas las compras de don Simón.



Con el apoyo de los índices, es posible tener una idea clara de las fluctuaciones en los volúmenes de producción, de compras, etc., lo cual permite tomar decisiones en los momentos precisos y detectar las posibles causas de dichas variaciones.

Debido a esto, es conveniente elaborar e interpretar correctamente los índices, de manera que las conclusiones obtenidas mejoren algún aspecto funcional de la actividad de que se trate.

3. En una gasolinera, un empleado determinó el índice o tanto por ciento de vehículos que cargaron sus tanques con gasolina el día anterior y obtuvo la siguiente información:

Tabla de índices de vehículos que cargaron gasolina		
Vehículos	Litros de gasolina	Índice de compras (%)
Microbuses	80,000	
Combis	120,000	
Camionetas	300,000	
Automóviles	240,000	
Total		

Número factorial

En el grado anterior (7.°) estudiamos los números factoriales y algunas aplicaciones, ahora vamos a recodar y a ejercitar mejor el tema.

Recordemos que por definición 0! = 1 .

Además que podemos resolver los factoriales de algunos números como:

$1! = 1$
$2! = 1 \times 2$
$3! = 1 \times 2 \times 3$
$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4$
$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$
.
.
.
$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \ldots \times (n-1) \times n$

El factorial de cualquier número es igual a él, multiplicado por el factorial de su antecesor.

Ejemplos:

$6! = 6 \times 5.$
Calculemos 6!:
Por definición $6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720.$

Ahora, calculemos $6 \times 5!$:
$6 \times 5! = 6 \times (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5) = 6 \times 120 = 720.$
Luego, $6! = 6 \times 5!$

En general: Podemos decir que $n! = n(n - 1)!$

Podemos calcular los factoriales de los números 4, 3 y 5 y realizar el resultado de:

$4! + 3! - 5!$ Y comprobar que da 90.

Simplificaciones con factoriales

Una expresión fraccionaria con factoriales puede ser simplificada, Ejemplo:

$$\frac{4! - 3!}{4!} = \frac{4(3!) - 3!}{4(3!)}$$

Se puede simplificar, porque el factorial de cualquier número es igual a él por el factorial de su antecesor.

Para simplificar la fracción, debemos factorizar el numerador:

$$\frac{4! - 3!}{4!} = \frac{4(3!) - 3!}{4(3!)} = \frac{(3!)(4! - 3!)}{4(3!)} = \frac{(4 - 3!)}{4}$$

Resolviendo la última fracción, tenemos:

$$\frac{4 - 3!}{4} = \frac{4 - (1 \times 2 \times 3)}{4} = \frac{4 - 6}{4} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{2}{\cancel{4}}} = \frac{-1}{2}$$

Una aplicación muy importante de los factoriales es en la solución de situaciones en las que se presentan variaciones o combinaciones, como cuando nos preguntamos ¿Cuántos números diferentes pueden formarse con un dígito dado?

Ejemplo: Con el dígito 9, solo pueden escribirse el número 9.

Con un dígito, puede formarse 1 número de una cifra: 1! = 1.

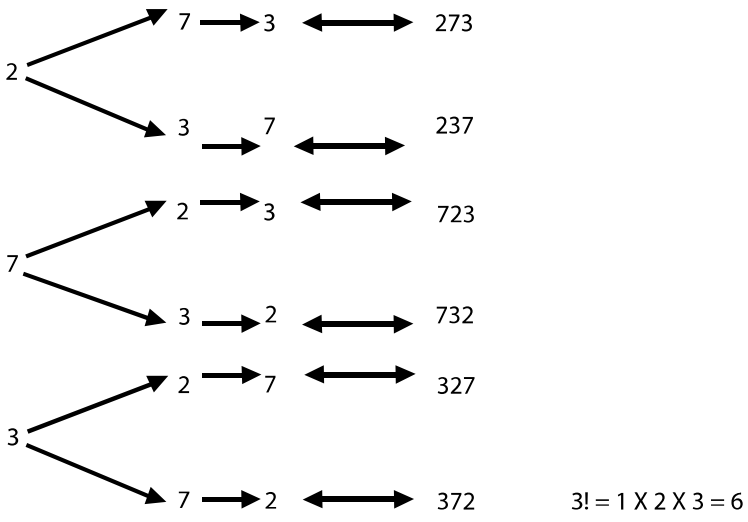
¿Cuántos números diferentes de dos cifras pueden formarse con dos dígitos dados, sin repetir dígito?

Ejemplo: Sin repetir dígito, con los números 5 y 3, pueden escribirse 2 números: el 53 y el 35.

Con dos dígitos, pueden formarse 2 números de dos cifras, sin repetir dígito: 2! = 1 x 2 = 2.

¿Cuántos números diferentes de tres cifras pueden formarse con tres dígitos dados, sin repetir dígito?

Ejemplo: Sin repetir dígito, formemos números de tres cifras con los dígitos 2, 7 y 3:



Es decir, que con 3 dígitos dados se pueden formar 6 números de 3 cifras sin repetir dígito

Recordemos el cálculo del factorial de algunos números:

Número n	Factorial de n (n!)	Operación	Resultado
0	0!		1
1	1!		1
2	2!	1 X 2	2
3	3!	1 X 2 X 3	6
4	4!	1 X 2 X 3 X 4	24
5	5!	1 X 2 X 3 X 4 X 5	120
6	6!	1 X 2 X 3 X 4 X 5 X 6	720
7	7!	1 X 2 X 3 X 4 X 5 X 6 X 7	5,040
8	8!	1 X 2 X 3 X 4 X 5 X 6 X 7 X 8	40,320
9	9!	1 X 2 X 3 X 4 X 5 X 6 X 7 X 8 X 9	362,880
10	10!	1 X 2 X 3 X 4 X 5 X 6 X 7 X 8 X 9 X 10	3,628,800
15	15!	1 X 2 X 3 X 4 X 5 X 6 X 7 X 8 X 9 X 10 X 11 X 12 X 13 X 14 X 15	1,307,674,368,000

En general: n! = 1 x 2 x 3 x 4 x 5 x... x (n-2) x (n - 1) x (n). El factorial de un número n es el producto de los factores decrecientes desde él hasta la unidad.
El factorial de un número se escribe n!, siendo n cualquier número entero positivo.

Con los factoriales podemos realizar operaciones. Observa detenidamente cada paso:

1. 2! + 5!
   Desarrollamos el factorial de cada sumando, así:

   2! + 5! = (1 x 2) (1 x 2 x 3 x 4 x 5).
   Resolvemos = 2 x 120
   cada parentesis = 240.

2. Detalla paso a paso:

   (4!)(6!) = (1 x 2 x 3 x 4) (1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6)
   = 24 x 720
   = 17,280.

3. Presta atención a las simplificaciones que realizamos en la solución siguiente:

$$2! + \frac{3!}{4!} = (1 \times 2)\left(\frac{1 \times 2 \times 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4}\right)$$

$$= \frac{1 \times 2 \times 3}{3 \times 4}$$

$$= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Explica en tu cuaderno el proceso realizado en cada paso y coméntalo con algunos de tus compañeros.

Variaciones

Analicemos el caso siguiente:

En un concurso, hay 20 participantes que compiten por ganar.

¿De cuántas maneras se pueden colocar los dos primeros puestos?
Como no hay repetición, es decir, hay un participante para el primer puesto y otro diferente para el segundo puesto entonces:

Para el primer puesto hay 20 posibilidades.
Para el segundo, solo 19 posibilidades.
Por tanto, llamando V al número de posibilidades, tenemos:

$$V = n(n-1)$$
$$V = 20(19) = 380.$$

Entonces, en total hay 380 maneras para que 20 participantes puedan ocupar los dos primeros puestos en el concurso.

Desde esta perspectiva, si de una población de tamaño ***n*** queremos extraer una muestra ordenada y sin repetición de tamaño determinado, razonamos así:

- El primer elemento lo podemos elegir entre ***n*** elementos.
- El segundo, al no poder repetir, podemos elegirlo entre ***n – 1*** elementos.
- El tercero, al no poder repetir, podemos elegirlo entre ***n – 2*** elementos.
- El cuarto, al no poder repetir, podemos elegirlo entre ***n – 3*** elementos.
- Y así sucesivamente, hasta el tamaño determinado.

Un arreglo ordenado y sin repetición se denomina variación ordinaria o variación sin repetición.

Ahora, analicemos el siguiente ejemplo con repetición:

Una baraja de póquer consta de 52 cartas. ¿De cuántas formas pueden elegirse 2 cartas, no necesariamente distintas?
La primera se puede elegir de 52 formas.

Como se puede repetir, significa que la primera carta que se saca se ve y se devuelve al montón, de tal manera que la segunda carta se puede elegir de 52 maneras también.

En total hay (52)(·52) = 2,704 formas.

Simbólicamente:
Llamemos **V´** al número de posibilidades con repetición, entonces **V´ = n(n).**
Para este caso de las cartas de la baraja, tenemos:
V´ = 52(52) = 2,704.

Un arreglo ordenado y con repetición se denomina variación con repetición

Aplicación

Copia y realiza los ejercicios siguientes, en tu cuaderno y comenta las soluciones con algunos compañeros.

1. Una baraja inglesa consta de 52 cartas.
   ¿De cuántas formas pueden elegirse 2 cartas, extraídas sucesivamente y sin repetir?

2. ¿Cuántos números de tres cifras diferentes se puede formar con los dígitos 1, 3, 5, 7 y 9?

3. En una carrera de 200 metros participan 10 corredores.
   ¿De cuántas formas diferentes se podrían repartir las medallas de oro, plata y bronce?

4. Una pareja de esposos están planeando un viaje sorpresa para sus hijos. Por ello, escogen 7 ciudades del país que marcan con las letras A, B, C, D, E, F y G. Si no quieren repetir ciudades, ¿cuántas rutas distintas pueden elaborar si pueden empezar y acabar en cualquiera de las ciudades?

5. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden repartir tres premios distintos entre seis ganadores?

6. Con las letras de la palabra **avión**, ¿cuántas ordenaciones distintas se pueden hacer para que empiecen por vocal?

Realiza las operaciones de los ejercicios 7 a 10. Siempre que sea posible simplifica.

7. $(7! - 5!) + 6! =$

8. $(3!)^2 =$

9. $4! + 5! - 2! =$

10. $\dfrac{5! - 4!}{4!} + \dfrac{4!}{3!} =$

Entendemos por…

Crecimiento exponencial es la progresión que aumenta por multiplicación de una cantidad constante llamada razón.

Diversión matemática

Las monedas falsas

¡Diviértete descubriendo el saco con monedas falsas!

Se tienen 10 sacos que contienen 10 monedas de plata cada uno, pero uno de los sacos tiene exclusivamente monedas falsas.

Las monedas falsas lucen igual que las genuinas, pero pesan o bien 1 gramo más o bien 1 gramo menos que las monedas genuinas. Se cuenta con una balanza de un platillo, que permite leer el peso en gramos y conocer el peso de las monedas genuinas.

¿Cuál es el mínimo número de monedas pesadas necesarias para determinar el saco que contiene las monedas falsas?

Tomado de http://www.mlevitus.com/

Busca posibles soluciones y coméntalas con tus amigos

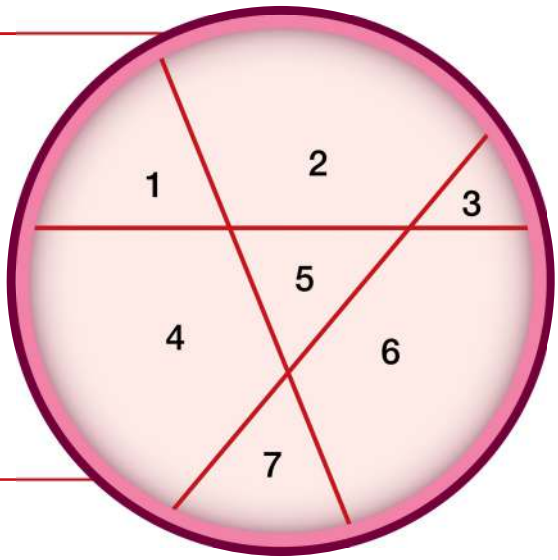
Día a día

Cortando el pastel

Con un solo corte recto puedes dividir un pastel en dos partes. Un segundo corte que atraviese el primero producirá probablemente cuatro partes y un tercer corte puede llegar a producir siete partes (ver la ilustración).

¿Cuál es el mayor número de partes que puedes lograr con seis cortes rectos?

Tomado de www.libros maravillosos./matematicaparadivertirse/



Tema 2. Probabilidad

Algunos de los juegos, en los que seguramente has participado, reciben el nombre de "azarosos", ya que tienen un resultado impredecible. Pero entonces, ¿qué probabilidades tienes de ganar?

Existen unas herramientas denominadas modelación de situaciones, en las cuales intervienen la probabilidad nula, la probabilidad de la intersección de eventos independientes y la probabilidad de eventos simples.

Indagación
Juega al "carisellazo"

En grupos de 3 estudiantes y cada uno con una moneda de cualquier denominación, previamente deciden cuál lado de la moneda se denomina cara y cuál se denomina sello. Cada uno hace 10 lanzamientos y anota en su cuaderno el resultado.

Al terminar, entre los tres, comparan los resultados y determinan quién obtuvo más veces cara y quién obtuvo más veces sello.

¿Quién o quienes ganaron?

¿Quién o quiénes sacaran los puntajes más bajos?

Conceptualización
Probabilidad de un evento

Existen situaciones cuyos resultados son impredecibles. Si, por ejemplo, se lanza al aire un dado, existen varios resultados posibles; sin embargo, ninguno de ellos es seguro.

Al realizar varias veces el experimento, es decir, lanzar varias veces el dado, se puede llevar el registro de los resultados obtenidos y establecer así la probabilidad de que ocurra cada suceso.

Pero esa probabilidad se puede señalar observando los diferentes resultados que se pueden obtener; esto es, 1, 2, 3, 4, 5 o 6.

Al conjunto de todos los resultados posibles al lanzar un dado se le denomina **espacio muestral (S o EM)**. En este caso, EM = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Si el dado que se lanza es un dado normal, es decir, si el dado no está "cargado", la probabilidad de que salga cada una de las caras será de una entre seis, esto es,

$$\text{probabilidad del evento: } P(A) = \frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número de resultados posibles}}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Esta fórmula se conoce como la regla de Laplace.

Un evento puede ser simple o compuesto.

Si el experimento consiste en lanzar un dado, se espera que ocurra el evento "obtener 5"; es decir, existe solo un resultado que satisface el experimento, por lo tanto es un evento simple.

Un evento simple o elemental consta de un resultado único.

Si en el experimento se espera el evento "obtener el número menor que 4", los resultados 1, 2 y 3 satisfarán el experimento. A esto se le conoce como evento compuesto.

Un evento compuesto consta de dos o más eventos simples.

Ahora bien, "obtener 1", al lanzar el dado, excluye la posibilidad de "obtener 2"; entonces ¿cuál es la posibilidad de que ocurra el evento compuesto "obtener 1 o 2" al alcanzar el dado? Si cada uno de los primeros eventos tiene 1/6 de probabilidad de salir, entonces:

El evento "obtener un número diferente de 1 o 2" será 4/6, pues las probabilidades restantes suman el total de probabilidades: si se tiene el suceso "obtener un número par" al lanzar el dado, este se define, en probabilidad, como un evento compuesto, y su probabilidad sería:

La probabilidad de que un evento ocurra o no se determina con el cociente del número de resultados favorables, entre el número total de resultados posibles del experimento.

Al sumar la probabilidad de todos los eventos posibles, el resultado será 1. En el experimento "lanzar un dado", el total de resultados determina todo el espacio muestral de eventos considerados.

El espacio muestral es el total de los resultados posibles de un experimento.

El espacio muestral se denota con EM; de acuerdo con en el ejemplo anterior, sería **EM = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.**

Frecuencia absoluta y frecuencia relativa

Sea CARA (C) y SELLO (S).

En el experimento se realizan diez lanzamientos y se registran los resultados siguientes:
C, S, C, C, C, S, S, C, C y C.

Se puede observar que se obtuvo siete veces cara y tres veces sello, por tanto la frecuencia de cada evento es sello = 3; cara = 7.

Si se dice que en una serie de lanzamientos se obtuvieron 3 sellos, este informe es vago y no ofrece ningún dato utilizable en la solución de futuros problemas. Este informe recibe el nombre de frecuencia absoluta.

Así, la **frecuencia absoluta** hace referencia al número de veces que se ha obtenido un determinado evento.

Aunque también existe otra forma de señalar la frecuencia de un evento:

Indicar el número de veces que se ha obtenido determinado evento en relación con el número de veces que se ha realizado el experimento.

En el ejercicio anterior se observa que tres sellos se obtuvieron en diez lanzamientos, esto es, 3/10 que representa el 30 % del total.

A esto se le llama frecuencia relativa.

Entonces, la **frecuencia relativa** es el porcentaje que representa el número de veces en que se produce determinado evento, en relación con el total de veces en que se realiza el experimento.

La frecuencia absoluta se denota con **fi** y la frecuencia relativa con **(fi/N) 100 %**.

Retomando los datos anteriores respecto a los lanzamientos, se pueden concentrar en una tabla de frecuencias.

En ella se señala la clase en la cual pueden anotarse los datos cualitativos o intervalos de datos cuantitativos (i), la frecuencia absoluta (fi) y la frecuencia relativa (fi/N) 100 %:

Intervalos de clase	Frecuencia absoluta f_i	Frecuencia relativa (f_i/N) 100%
Sello	3	30
Cara	7	70
Total	10	100

Probabilidad clásica

No siempre es posible realizar repetidamente un experimento para determinar sus frecuencias relativas y así señalar la probabilidad de que se obtenga determinado evento.

Si, por ejemplo, se desea conocer la probabilidad de que al lanzar un dado al aire, se obtenga el número 6, esta se podría calcular lanzándolo un cierto número de veces y registrando tales resultados.

Sin embargo, existe una forma de establecer la probabilidad de dicho evento antes de iniciar cualquier experimento. En efecto, si se sabe que cada cara del dado tiene la misma probabilidad de salir y existen seis diferentes resultados posibles, cada una de ellas tendrá una posibilidad entre seis opciones equiprobables, esto es, 1/6.

Con lo anterior se puede afirmar que la probabilidad de obtener una opción cualquiera de sus caras es 1/6.

Si el evento es obtener un número mayor que 4, los dos resultados que satisfacen esa condición son el 5 y el 6. Si se suman ambos, puesto que "sacar 5" excluye "sacar 6", la probabilidad del evento será de 2/6.

Estos ejemplos nos ayudarán a construir una expresión para encontrar la probabilidad de un evento determinado:

1. ¿Qué expresa 1/6? o ¿qué expresa 2/6?

Estas razones se construyen entre "el número de resultados favorables": 1 y 2, en nuestros ejemplos, y "el número de resultados posibles del evento; en este caso 6, en ambos ejemplos.

Recordemos:

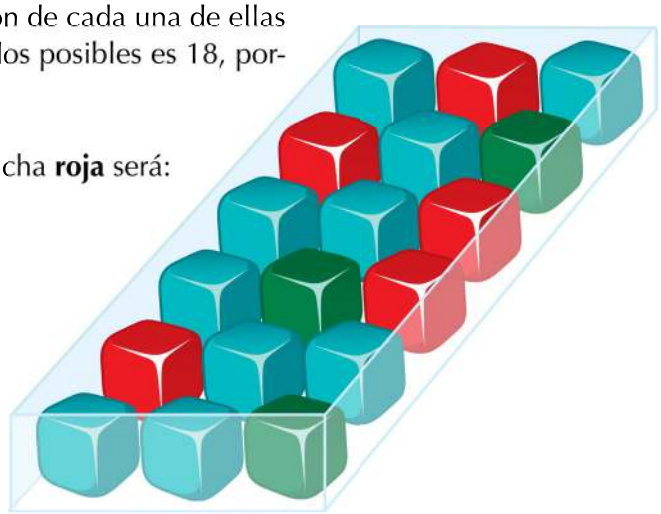
En general se tiene: $\text{probabilidad del evento: } P(A) = \dfrac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número de resultados posibles}}$

Simbolicamente: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$

2. Ahora deseamos conocer la probabilidad de sacar una ficha de un color determinado, de una caja en la que hay 10 azules, 5 rojas y 3 verdes. La probabilidad esperada de sacar una ficha **azul** será:

$$P(A) = \frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número de resultados posibles}} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9},$$

ya que en la caja hay 10 fichas azules y la obtención de cada una de ellas daría la oportunidad de acertar. El número de resultados posibles es 18, porque en la caja hay 10 + 5 + 3 = 18 fichas en total.



De manera análoga, la probabilidad de sacar una ficha **roja** será:

$$P(R) = \frac{n(R)}{n(S)} = \frac{5}{18},$$

y la probabilidad de sacar una ficha **verde** será:

$$P(V) = \frac{n(V)}{n(S)} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}.$$

Recuerda:
La probabilidad esperada o teórica de que suceda un evento cuando los sucesos elementales son equiprobables se puede calcular mediante la expresión o fórmula clásica, llamada también ley de Laplace. Así:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número de resultados posibles}}$$

La probabilidad clásica y la frecuencia están estrechamente relacionadas, pues mientras sea mayor el número de veces que se realiza el experimento, la frecuencia relativa se acercará cada vez más a la probabilidad clásica. A esto se le conoce como ley de los grandes números.

Si se señala el evento "obtener 3 o 2" al lanzar un dado al aire, la probabilidad favorable de ese evento es 2/6, en tanto que la desfavorable es 4/6. Si se suman ambas probabilidades, se tiene:

$$\text{Probabilidad favorable} + \text{probabilidad desfavorable} = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} = 1$$

La suma de la probabilidad favorable más la desfavorable en un evento determinado es siempre 1.

Probabilidad nula

Existen problemas que aparentemente son difíciles de solucionar, sobre todo cuando tienen que ver con la probabilidad. Pero en sí su resolución es muy sencilla.

Analicemos los ejemplos siguientes:

1. En un equipo de baloncesto hay 20 estudiantes: 7 son mujeres que tienen ojos cafés, otras 4 tienen cabello castaño y ojos cafés, 5 son hombres de ojos cafés y los 4 restantes son hombres de cabellos castaños y ojos negros.
   Si se selecciona un estudiante al azar, qué probabilidad habría de que sea:

   a. Una mujer
   b. Un hombre
   c. Una mujer con ojos negros

Solución:

a. Para obtener la probabilidad de que sea una mujer, se tienen los siguientes datos:

n(A) = resultados del evento. En este caso 11, ya que son en total 11 mujeres.
n(S) = número total de resultados posibles, en este caso 20.
P(A) = probabilidad del evento.

La probabilidad de que al seleccionar un estudiante, este sea mujer es

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{11}{20}$$

b. Para obtener la probabilidad de que sea un hombre, se tiene que:
n(A) = 9, ya que aquí se consideran los 9 hombres.
n(S) = 20, porque es el total de estudiantes.

Entonces,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{20}$$

Entonces, la probabilidad de que al seleccionar un estudiante este sea hombre es de: $\frac{9}{20}$

c. Para obtener la probabilidad de que sea una mujer con ojos negros, se tiene:

De acuerdo con los datos del problema, únicamente se hace referencia a ojos cafés y a mujeres con cabello castaño y ojos cafés.

Como no existe información de mujeres con ojos negros, el resultado favorable de que este evento ocurra es cero, por consiguiente:

$$n(A) = 0$$
$$n(S) = 20$$
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{0}{20} = 0$$

Esto indica que la probabilidad de seleccionar una estudiante que sea mujer con ojos negros es cero, ya que dicho elemento no existe en el espacio muestral. De igual forma, hubiera sucedido si se buscara la probabilidad de que haya sido una mujer con ojos verdes y azules, pues no hay ninguna mujer del equipo que tenga esos colores de ojos.

Cuando esto ocurre, el evento que no forma parte del evento muestral se llama **evento imposible**, debido a que nunca va a ocurrir. Si dicho evento no va a ocurrir, esto trae como consecuencia que su probabilidad sea cero.

Cuando esto sucede, a dicha posibilidad se le conoce como **probabilidad nula.**

2. En una caja hay cinco tarjetas y en cada una está escrita una vocal diferente.
¿Cuál es la probabilidad de sacar una tarjeta que tenga la letra e y cuál la de sacar una tarjeta que tenga una consonante?

n(A) = 1, ya que se trata de una sola letra.
n(S) = 5, debido a que son las cinco vocales.
Entonces, P(A) = ?

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{5}$$

La probabilidad de sacar una tarjeta que tenga la letra e es de 1/5.

La probabilidad de que la tarjeta que se saque tenga una consonante es n(A) = 0, ya que en las tarjetas únicamente hay vocales.

n(S) = 5.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{0}{5} = 0$$

La probabilidad de que al sacar una tarjeta esta tenga una consonante es cero, ya que no hay consonantes en las tarjetas y nuevamente se considera que es un evento imposible de que suceda.

Aplicación

Copia los ejercicios en tu cuaderno y compara las soluciones con algunos de tus compañeros:

1. Al lanzar un dado:

   a. ¿Cuál es el espacio muestral (EM) de este evento?
   b. ¿Cuál es la probabilidad esperada de obtener cada uno de los sucesos del espacio muestral si el dado es correcto, es decir que no está cargado en alguna cara?
   c. Encuentra las siguientes probabilidades:

   P(5) = ____; P(6) = ____; P(0) = ____
   P(obtener un número par) = ____; (obtener un número menor que 4) = ____
   P(obtener un número diferente de 2) = ____
   P(obtener un número menor que 1) = ____
   P(obtener un número múltiplo de 3) = ____

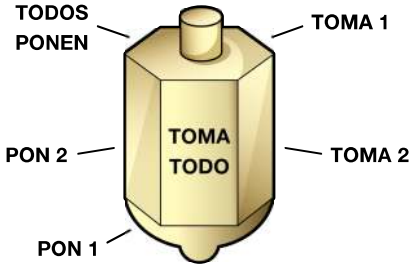
2. Una baraja francesa tiene 52 cartas. Hay cuatro pintas: corazones, tréboles, diamantes y picas. De cada pinta hay 13 cartas: tres figuras, K, Q y J, y diez números as (1), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

   a. ¿Cuál es el espacio muestral?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cada uno de los sucesos del espacio muestral?
   c. Calcula las probabilidades.

   P(corazón) = ____; P(K) = ____; P(carta roja) = ____
   P(un número) = ____; P(una figura) = ____
   P(un número mayor que 10) = ____; P(no sacar figura) = ____

3. De cierta progresión geométrica se conoce que el primer término es 2 y la razón es 3 (R = 3). Escribe sus cinco primeros términos.

4. Observa la perinola y responde:



   a. ¿Cuál es su espacio muestral?
   b. Señala un evento simple.
   c. ¿Cuál será su probabilidad?
   d. Señala un evento compuesto.
   e. ¿Cuál será su probabilidad?

5. Tienes en una bolsa cintas de colores: 15 cintas negras, 8 cintas rojas y 7 cintas amarillas. De ella se va a sacar una, sin que se pueda ver de antemano su color.
   ¿Qué color de cinta crees que sea más probable extraer? ¿Por qué? ¿Cuál sería el color menos probable de sacar? ¿Por qué?
   Si apuestas a sacar una cinta roja, ¿cuántas cintas hay en la caja que favorecería tu apuesta?
   Si uno de tus compañeros apuesta a sacar una canica negra y otro a sacar una amarilla, ¿quién de ellos tendrá más opción de ganar? ¿Por qué?
6. Escribe el espacio muestral en el caso del lanzamiento de dos dados simultáneamente (al mismo tiempo).

En una baraja española hay 4 grupos de 19 cartas cada una con las denominaciones de 1 (as), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10 (sota), 11(caballo) y 12 (rey); los grupos son oro, copa, espadas y bastos.

Encuentra la probabilidad de sacar al azar:

7. El as de oros.
8. Un número impar de cualquier pinta (oro, copa, espada o basto).
9. Un caballo cualquiera.
10. Una carta de copas cualquiera.

Entendemos por...

Evento a la ocurrencia de un fenómeno determinado en un experimento dado.

Diversión matemática

Las tres corbatas

El señor Pardo, el señor Verde y el señor Negro estaban almorzando juntos. Uno de ellos llevaba una corbata parda, otro una corbata verde y otro una corbata negra.

- ¿Se han dado cuenta, dijo el hombre de la corbata verde, de que aunque nuestras corbatas son de colores iguales a nuestros nombres, ninguno de nosotros lleva la corbata que le correspondería a su nombre?
- ¡Por Dios que tienes razón! Exclamó el señor Pardo.

¿De qué color era la corbata de cada uno?

Solución

El señor Pardo tenía la corbata negra. El señor Negro tenía la corbata verde. El señor Verde tenía la corbata parda. Pardo no podía tener una corbata parda, pues entonces le correspondería a su nombre. No podía tener corbata verde, pues ese era el color de la corbata del hombre que les hizo la pregunta. Por tanto, la corbata de Pardo debía ser negra. Esto deja las corbatas verde y parda para el señor Negro y el señor Verde, respectivamente.

Tomado de http://www.librosmaravillosos.com/matematicaparadivertirse/seccion09.html

Día a día

Juegos de azar

De ilusión también se vive.

Cuando se juega a la lotería o a cualquier otro juego de azar, pensamos que es posible y hasta probable que nos ganemos el premio.

En realidad es posible, pero muy poco probable.

Por ejemplo, jugando una apuesta a la lotería con 4 cifras y 2 series, tenemos 1 posibilidad entre casi 1 millón de que nos "toque la suerte".

Jugando una columna en la quiniela, tenemos una posibilidad entre más de catorce millones de obtener el pleno al 15, o sea, casi ninguna.