GUÍA	**N° 3**	
ASIGNATURA	**ALGEBRA**	
GRADO	**NOVENO J.M.**	
PERIODO ACADÉMICO	**3 PERÍODO**	
	RICARDO MORA DOCENTE	fmoram@educacionbogota.edu.co https://profericardomora.blogspot.com/ **WhatsApp 3212829382** **INGRESA POR AQUÍ A ENCUENTROS VIRTUALES POR TEAMS** **Horario:** **Martes 8:00 a 9:30 am** **Miercoles 10:00 a 11:30 am**
DESEMPEÑO DEL PERIODO	**Identifica y utiliza relaciones entre el volumen y la capacidad de algunos cuerpos redondos (cilindro, cono y esfera) con referencia a las situaciones escolares y extraescolares.** **Interpreta el espacio de manera analítica a partir de relaciones geométricas que se establecen en las trayectorias y desplazamientos de los cuerpos en diferentes situaciones (funciones lineal y cuadrática)**	
INDICACIONES GENERALES:	➢ **Presentar todos los talleres propuestos de forma ordenada, organizada y completa, con buena caligrafía y ortografía. (UNICAMENTE EN FORMATO PDF)** ➢ **Presentar oportuna y puntualmente las actividades propuestas por el docente, según las fechas indicadas en el cronograma.** ➢ **Participar de la mayor cantidad posible y con la mejor disposición de los encuentros virtuales programados por cada docente.**	

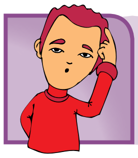
CRONOGRAMA DE ENTREGA DE LAS ACTIVIDADES	**Actividad**	**DESARROLLO Y TEMÁTICAS**	**Fecha de Entrega**
	Taller 1	• Estudiantes **CON CONECTIVIDAD** encuentros virtuales por plataforma teams. • Estudiantes **SIN CONECTIVIDAD** Análisis de guía páginas 105 a 145 y desarrollo aplicación pag. 110	18 de junio

	Taller 2	• Estudiantes **CON CONECTIVIDAD** encuentros virtuales por plataforma teams. • Estudiantes **SIN CONECTIVIDAD** Análisis de guía páginas 105 a 145 y desarrollo aplicaciones páginas 124, 125 y 126.	Julio 09
	Taller 3	• Estudiantes **CON CONECTIVIDAD** encuentros virtuales por plataforma teams. • Estudiantes **SIN CONECTIVIDAD** Análisis de guía páginas 105 a 145 y desarrollo aplicación pag. 135 y 136	Julio 23
	Taller 4	• Estudiantes **CON CONECTIVIDAD** encuentros virtuales por plataforma teams. • Estudiantes **SIN CONECTIVIDAD** Análisis de guía páginas 105 a 145 y desarrollo aplicación pag. 143 y 144	13 de agosto
EVALUACIÓN Y VALORACIÓN:	Valoración de los trabajos presentados, **asistencia y participación respetuosa y activa durante los encuentros**, posibles evaluaciones que programen el docente y autoevaluación y heteroevaluación.		

APOYO AUDIVISUAL

Actividad	Sub-Tema	Vídeo de apoyo
Taller 1	Áreas y volúmenes de sólidos	Clases de matemáticas profe ALEX, ver listas de reproducción, sección geometría: https://www.youtube.com/channel/UCanMxWvOoiwtjLYm08Bo8QQ
Taller 3 y 4	Función lineal	Clases de matemáticas profe ALEX, ver listas de reproducción, sección geometría analítica: https://www.youtube.com/channel/UCanMxWvOoiwtjLYm08Bo8QQ
Taller 3	Sistema de ecuaciones lineales	https://www.youtube.com/watch?v=oQQfG1zIPMc
Taller 4	Función cuadrática	https://www.youtube.com/watch?v=gnAdna_tLK0
GEOGEBRA	Tutorial GeoGebra	https://www.youtube.com/watch?v=a9Hw1VT-YxY&list=PLS6BAF1pM505iGW_uSR6nw_QeKmAlg5Tg&index=1
	Descargar Aplicaciones GeoGebra	https://www.geogebra.org/download?lang=es
	¿Cómo descargar GeoGebra en celular?	https://play.google.com/store/apps/details?id=org.geogebra.android.geometry&hl=es_CO

Tema 2. Áreas y volúmenes de los sólidos



Indagación

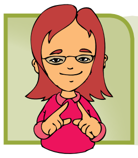
Recordemos que volumen es la medida del espacio ocupado por un cuerpo. El volumen de los cuerpos es el resultado de sus tres dimensiones: ancho, alto y profundidad.

En escultura y pintura, la manera de tratar la tridimensionalidad (tres dimensiones: largo, ancho y alto) de las masas.

En escultura, se le llama volumen a una estructura formal tridimensional, así como también volumen a las partes componentes del todo escultórico, cuando éstas tiene el carácter de masas.

En arquitectura, se le llama volumen al conjunto exterior de un edificio, que encierra el espacio interior.

Escribe en tu cuaderno a cerca del volumen, por ejemplo, cuáles objetos de tu casa tienen volumen. Compara tu trabajo con dos o tres compañeros.



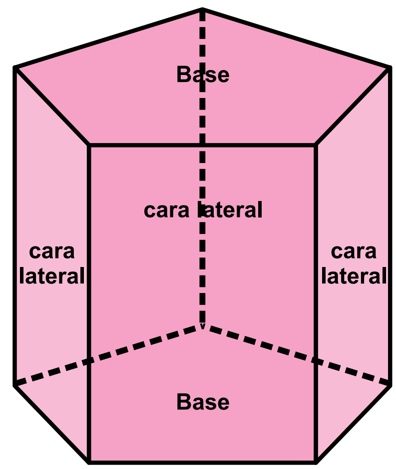
Conceptualización

Prisma

Es un poliedro limitado por dos polígonos congruentes y paralelos llamados bases y varios paralelogramos llamados caras laterales.

Los prismas se clasifican según el polígono que corresponde a sus bases. Así, los prismas pueden ser triangulares, pentagonales, hexagonales, entre otros.

En cualquier prisma se puede calcular el área lateral, el área total y el volumen.



Área Lateral (A_L)

Es la suma de las áreas de las caras laterales y corresponde al producto de la altura del prisma por el perímetro de una de las bases.

$$A_L = h \cdot P_B$$

Área total (A_T)

Es la suma del área de las dos bases y el área lateral del prisma.

$$A_T = A_L + 2A_B$$

Volumen

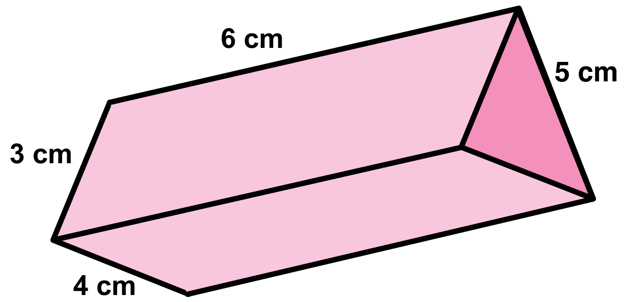
Es el producto del área de la base por la altura del prisma.

$$V = A_B \cdot h$$

Analicemos la situación siguiente:

Una caja prismática de base triangular tiene las dimensiones como muestra la figura.

Queremos conocer su: área lateral, área total y volumen.



Para calcular el área lateral del prisma se calcula el perímetro de la base y se multiplica por la altura.

P= 3 cm + 4 cm + 5 cm = 12 cm

$$A_L = h \cdot P_B$$

$$A_L = 6cm \cdot 12cm = 72cm^2$$

Para calcular el área total del prisma, se calcula el área de la base.

Luego, se suma el área lateral con el doble del área de la base.

$$A_B = \frac{3cm \cdot 4cm}{2} = 6cm^2$$

$$A_T = A_L + 2A_B$$

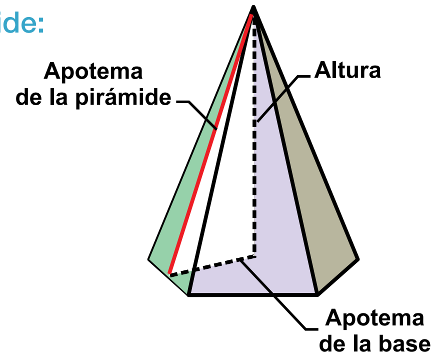
$$A_T = 72cm^2 + 2 \cdot 6cm^2 = 84cm^2$$

Y para calcular el volumen del prisma, se multiplica el área de la base por la altura:

$$V = A_B \cdot h$$

$$V = 6cm^2 \cdot 6cm = 36cm^3$$

Pirámide:



La pirámide es un poliedro en el cual una de sus caras, llamada *base*, es un polígono y lasotras caras, llamadas *caras laterales*, siempre son triángulos que concurren en un vértice común.

Las pirámides se clasifican según el polígono que corresponde a su base, en pirámide triangular, hexagonal, pentagonal, entre otras. Además, una pirámide puede ser recta u oblicua.

Una pirámide es recta si todas sus caras laterales son triángulos isósceles y es oblicua si alguna de sus caras laterales es un triángulo escaleno.

En cualquier pirámide se puede calcular el área lateral, el área total y el volumen.

Área Lateral (A_L): es la suma de las áreas de las caras laterales. Así, si "n" es el número de lados de la base y "A" es el área de una de las caras laterales, se tiene que:

$$A_L = n.A$$

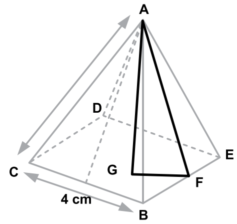
Área total (A_T): es la suma del área de la base y el área lateral.

$$A_T = A_B + A_L$$

Volumen: es la tercera parte del producto del área de la base y la altura de la pirámide.

$$V = \frac{1}{3}(A_B.h)$$

Ejemplo: calcular el área lateral y el volumen de una pirámide cuya base es un cuadrado de lado 4 cm. y cuyas caras laterales son triángulos equiláteros.



Para calcular el área lateral se halla el área del triángulo EBA y se multiplica por el número de lados de la base, así:

Primero hallamos la altura del triángulo EBA, aplicando el Teorema de Pitágoras, recordemos que la altura va del ángulo al lado opuesto y es perpendicular al punto medio:

$$h = \sqrt{(4cm)^2 - (2cm)^2} = \sqrt{16cm^2 - 4cm^2} = \sqrt{12cm^2} = 3.46cm$$

Luego, se calcula el área del triángulo EBA:

$$A_\Delta = \frac{4cm \cdot 3{,}46cm}{2} = \frac{13.84}{2} cm^2 = 6.92cm^2$$

Luego se calcula el área lateral, para ello se multiplica por 4 el área del triángulo EBA, (la pirámide tiene cuatro caras, pues su base es cuadrada):

$$A_L = n \cdot A$$
$$A_L = 4 \cdot (6.92cm^2) = 27.68cm^2$$

Para calcular el volumen, primero debemos hallar la altura de la pirámide, aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$AG = \sqrt{(3.46cm)^2 - (2cm)^2} = \sqrt{11.97cm^2 - 4cm^2} = 2.82cm$$

Por lo tanto el volumen es:

$$V = \frac{1}{3}(A_B \cdot h)$$

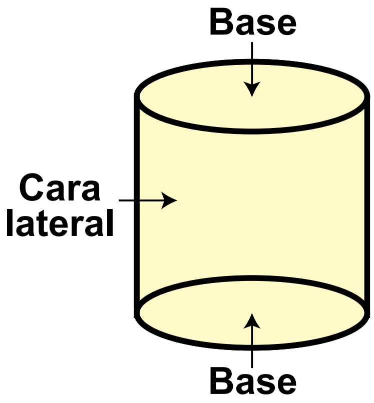
$$V = \frac{1}{3}(16cm^2 \cdot 2.82cm) = \frac{1}{3}(45.12cm^3) = 15.04cm^3$$

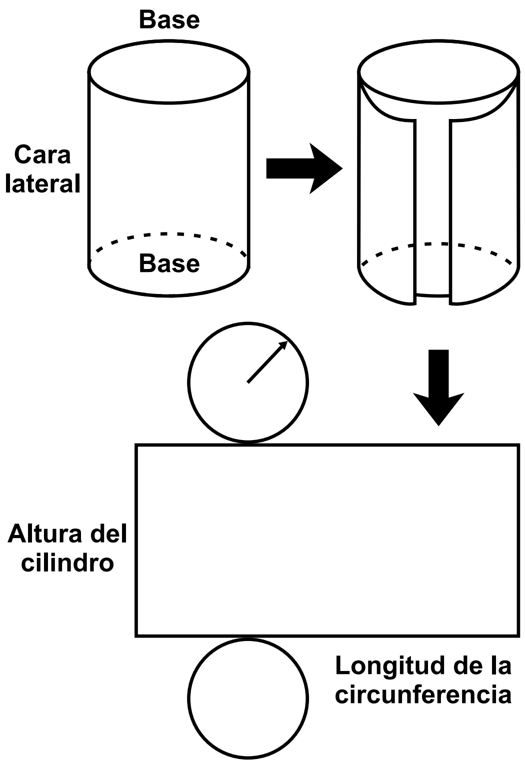
Cuerpos redondos: son sólidos limitados por superficies curvas o por superficies planas y curvas. Los principales cuerpos redondos son: el cilindro, el cono y la esfera.

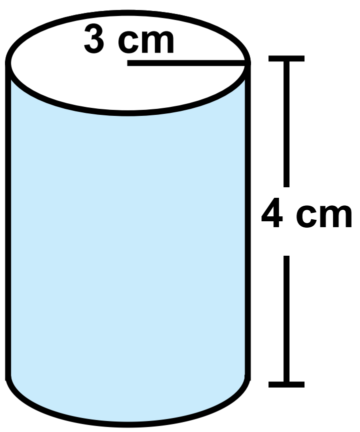
Cilindro

Es un cuerpo redondo limitado por una superficie curva y dos caras planas circulares.

La superficie curva que conforma el cilindro se denomina *cara lateral* y las dos caras circulares se denominan *bases*.







Al efectuar el desarrollo de un cilindro se puede observar que la cara lateral pertenece a un rectángulo cuyo largo es la longitud de la circunferencia que corresponde a la base y cuyo ancho es la altura del cilindro.

Por tanto, si "h" es la altura del cilindro y "r" el radio de la base se tiene que:

El área lateral (A_L) del cilindro corresponde al área del rectángulo que representa su desarrollo.

$$A_L = (2 \cdot \pi \cdot r)h$$

El área total del cilindro es la suma del área de las dos bases y el área lateral.

$$A_T = A_L + 2A_B = (2 \cdot \pi \cdot r)h + 2 \cdot \pi \cdot r^2 = (2 \cdot \pi \cdot r)(h + r)$$

El volumen del cilindro es el producto del área de la base por la altura del cilindro.

$$V = A_B \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Analicemos el área lateral, área total y el volumen del cilindro de radio 3 cm. y altura 4 cm.

Se reemplazan las medidas del radio y de la altura en las expresiones correspondientes al área lateral, al área total y al volumen del cilindro.

Luego, se realizan las operaciones indicadas así:

Área lateral:

$$A_L = (2 \cdot \pi \cdot r)h = 2 \cdot 3.14 \cdot 3cm \cdot 4cm = 75.36cm^2$$

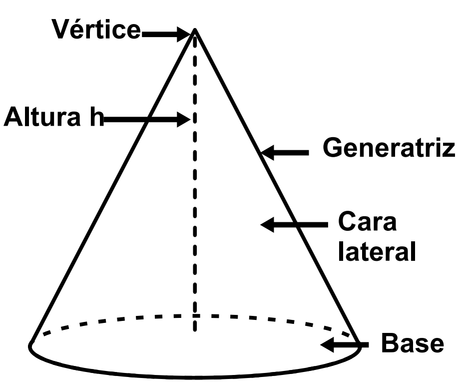
Área total:

$$A_T = (2 \cdot \pi \cdot r)(h + r) = (2 \cdot 3.14 \cdot 3cm)(4cm + 3cm) = 131.88cm^2$$

Volumen:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3.14(3cm^2) \cdot 4cm = 113.04cm^3$$

Cono



Es un cuerpo redondo limitado por una superficie curva y una cara plana circular.

El cono está conformado por los siguientes elementos: cara lateral, base, vértice, altura y generatriz.

La generatriz es el segmento que tiene como puntos extremos el vértice del cono un punto de la circunferencia de la base.

La altura es la medida del segmento perpendicular a la base, cuyo punto extremo es el vértice del cono.

Si simbolizamos con "r" el radio de la base del cono, con "g" la generatriz del cono y con "h" su altura, se tiene que:

El área lateral (A_L) del cono corresponde al área del sector circular que resulta de su desarrollo.

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g$$

El área total (A_T) del cono es la suma del área de la base y el área lateral.

$$A_T = A_L + A_B = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2 = \pi \cdot r \cdot (g + r)$$

El volumen del cono es un tercio del producto del área de la base por la altura del cono.

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot h = \frac{1}{3}(\pi \cdot r^2 \cdot h)$$

Veamos cómo resolver el problema de un cono:

Calcular la medida de la generatriz, el área lateral, área total y el volumen de un cono cuyo radio es 5 cm. y su altura es 6 cm.

Para hallar la medida de la generatriz, se aplica el Teorema de Pitágoras:

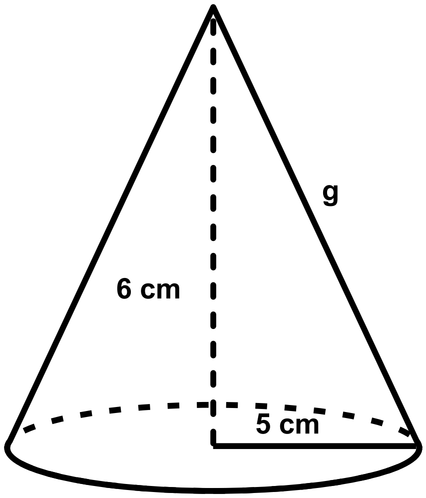
$$g = \sqrt{(6cm)^2 + (5cm)^2} = \sqrt{36cm^2 + 25cm^2} = \sqrt{61cm^2} \approx 7{,}81cm$$

Luego, se reemplazan las medidas del radio, la altura y la generatriz para calcular el área lateral, el área total y el volumen.

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g = 3.14 \cdot 5cm \cdot 7.81cm = 122.617cm^2$$

$$A_T = \pi \cdot r \cdot (g + r) = 3.14 \cdot 5cm \cdot (7.81cm + 5cm) = 201.11cm^2$$

$$V = \frac{1}{3}(\pi \cdot r^2 \cdot h) = \frac{1}{3}(3.14 \cdot (5cm)^2 \cdot 6cm) = 157cm^3$$

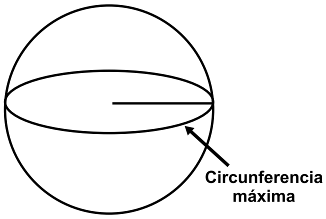


Esfera

Es un cuerpo redondo limitado por una superficie curva. Todos los puntos de la superficie de la esfera equidistan de un punto llamado centro.

La distancia entre un punto de la superficie de la esfera y el centro se denomina radio.

La intersección de la superficie de la esfera con un plano que pasa por su centro se denomina circunferencia máxima y el círculo determinado por esta se denomina círculo máximo.



Si se representa con "r" el radio de la esfera se tiene que:

El área de la superficie de la esfera es cuatro veces el área del círculo máximo.

$$A_E = 4\pi r^2$$

El volumen de la esfera se calcula mediante la expresión:

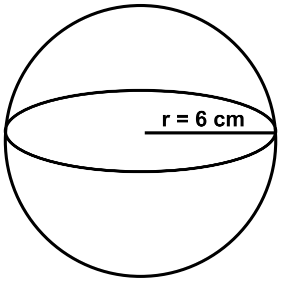
$V_E = \frac{4}{3}\pi r^3$ en donde r es el radio de la esfera.

Ejemplo: calcular el área de la superficie de una esfera y su volumen, si su diámetro es 12 cm.

Como la esfera tiene un diámetro de 12 cm, su radio es 6 cm. Luego se reemplaza la medida del radio para calcular el área de la superficie y su volumen.

$$A_T = 4\pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3.14(6cm)^2 = 4 \cdot 3.14 \cdot 36cm^2 = 452.39cm^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3.14 \cdot (6cm)^3 = \frac{4}{3} \cdot 3.14 \cdot 216cm^3 = 904.32cm^3$$

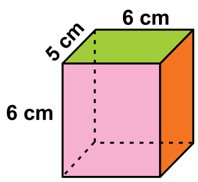


Aplicación

En forma individual, resuelve los siguientes ejercicios, en tu cuaderno. Dibuja las figuras que sean necesarias.

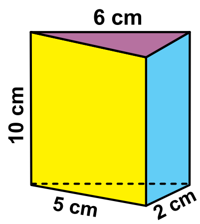
1. Marisol tiene una cajita como muestra la figura. Ella quiere saber:

   a) El área lateral
   b) El área total
   c) El volumen

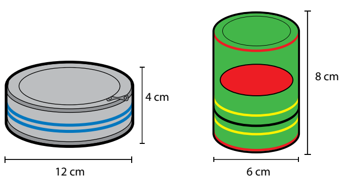


2. Un trozo de madera tiene la forma y las medidas que muestra la figura.
   Calcula:

   a) El área lateral
   b) El área total
   c) El volumen



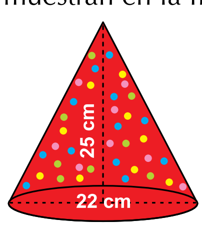
3. En una empresa de enlatados se utilizan recipientes con forma cilíndrica para empacar arvejas como se muestra a continuación:



   a) ¿Cuál de los dos recipientes tiene mayor capacidad?
   b) ¿En cuál de los dos recipientes se utiliza mayor cantidad de hojalata para su elaboración?
   c) Si en cada recipiente la etiqueta cubre toda la cara lateral, ¿en cuál de las dos etiquetas se utiliza mayor cantidad de papel?

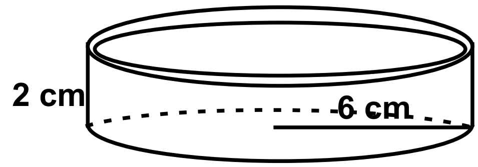
4. Josefa elaboró unos gorritos para una fiesta infantil. El diseño y medidas se muestran en la figura.
   Calcula:

   a) El área lateral
   b) El área total
   c) El volumen

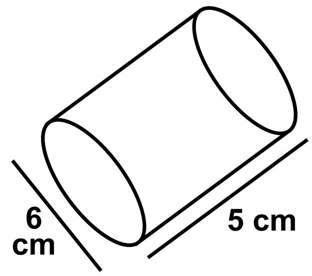


Calcula área lateral, área total y volumen de los cuerpos siguientes:

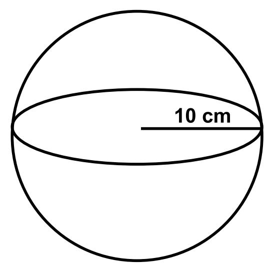
5.



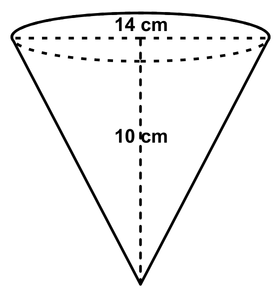
6.



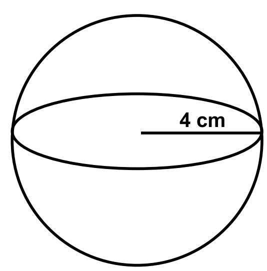
7.



8.



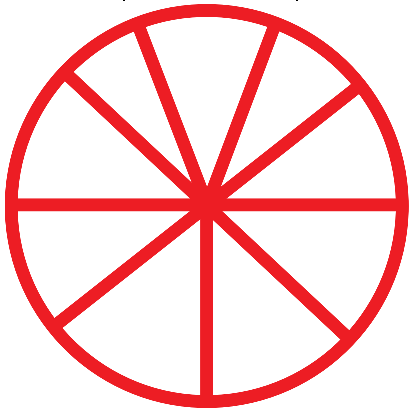
9.



10. Realiza el dibujo y calcula el área lateral, el área total y el volumen de una caja cúbica de 75.25 cm de lado.

Entendemos por…

Equidistante aquel punto que queda a la misma distancia de otro. Por ejemplo, el centro de una circunferencia es equidistante de los puntos de ella.



Diversión matemática

1. En la sopa de letras siguiente aparecen los nombres de diez matemáticos. Búscalos:

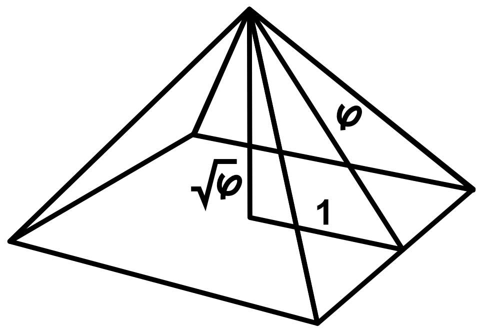
   Bolzano, Cauchy, Euclides, Euler, Fermat, Gauss, Leibniz, Newton, Pitágoras y Taylor.

G	C	A	U	S	E	R	H	U	P
L	A	P	N	A	F	O	D	R	I
E	U	L	E	R	O	L	Y	A	T
U	C	O	W	O	S	Y	U	P	A
C	H	N	T	G	A	U	S	S	M
L	Y	A	O	A	Z	W	M	I	R
I	L	Z	N	T	O	E	G	B	E
D	A	L	E	I	B	N	I	Z	F
E	R	O	T	P	I	T	A	E	A
S	A	B	N	I	Z	O	R	T	N

Día a día

Sección áurea y la Gran Pirámide de Gizeh

La gran pirámide de Gizeh se construyó hace 4,500 años aproximadamente y se incluyó entre las siete maravillas del mundo, siendo la más antigua y sin embargo la única que se conserva en la actualidad.



Leyendas de todo tipo han acompañado a cualquier manifestación de esta cultura fascinante y desconocida: sus dioses, sus faraones, sus jeroglíficos y, por supuesto, sus increíbles templos y construcciones funerarias nos hablan de grandeza y de misterio. Y de saberes ocultos celosamente guardados por poderosos sacerdotes.
Entre estos saberes secretos se hallan, cómo no, los conocimientos matemáticos. Mucho se ha escrito sobre las matemáticas de las pirámides, y se pueden leer todo tipo de fantásticas relaciones numéricas encarnadas en las formas y medidas de esas enormes moles de piedra. La cuestión es que efectivamente hay matemáticas, y no hay más que fijarse en la forma elegida, pero quizá no tantas como se cree. Veamos un ejemplo de estos supuestos conocimientos: imaginemos que alguien Nos muestra el siguiente dibujo, en el que la letra φ representa la sección áurea.
Según el historiador griego Heródoto, la Gran Pirámide de Gizeh construyó de modo que la superficie de una cara fuese igual a la de un cuadrado que tuviese por lado la altura de la pirámide.
Es decir: el apotema de la pirámide, la distancia que va desde la cúspide de la pirámide hasta el punto medio de una de las aristas horizontales, se eligió de modo que la superficie de cada una de las caras triangulares fuese igual al cuadrado de la altura.

Tomado de: http://www.epsilones.com/paginas/t-historias1.html

Este capítulo fue clave porque

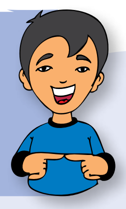
Aprendí a calcular el área y el volumen de figuras geométricas como la pirámide, el cono, la esfera y el cilindro.

Comprendí la importancia de aprovechar las figuras geométricas en maximizar la economía.

Aprendí a utilizar las razones trigonométricas, y su aplicación en la resolución de problemas.

Aprendí el uso de la calculadora en funciones trigonométricas

Conectémonos con Biología



Geometría en el cuerpo humano

Polígono. La sangre llega al cráneo por dos caminos o dos pares de arterias: las carótidas por delante y las vertebrales por detrás. Para evitar que la obstrucción de una de ellas dañe a un órgano tan importante como el cerebro, se comunican entre sí por otras pequeñas arterias que adoptan en la base del cráneo la forma de un hexágono: se trata del polígono de Willis. Son un muy acertado mecanismo de seguridad.

Triángulo. El triángulo de Scarpa es bien conocido por los toreros. Tiene su base en la ingle, y su vértice, hacia abajo, y puede apreciarse bien en la parte anterior e interna del muslo en las personas delgadas. Su importancia radica en que por él discurren, muy superficialmente, la arteria femoral, las venas femoral y safena interna y el nervio crural. Se considera que es uno de los lugares preferidos por el toro para cornear y sus lesiones pueden ser extremadamente graves.

Tomado de: http://www.eltiempo.com/archivo/documento/MAM-442258

Repasemos lo visto

Inicialmente decíamos:

Te has preguntado: ¿Qué importancia tiene la geometría en nuestra vida?

Revisamos cómo desde la Antigüedad el ser humano ha utilizado métodos de medición para solucionar sus problemas de la vida diaria y con el correr de los siglos se ha constituido la geometría en una ciencia no solo práctica sino con todo un desarrollo teórico digno de estudiar.

Las construcciones definen el ambiente físico que rodea al ser humano, y forman parte de la cultura e historia de cada civilización.

Cada construcción se diseña pensando en su funcionalidad, belleza y disposición de los volúmenes, usando figuras geométricas en su diseño.

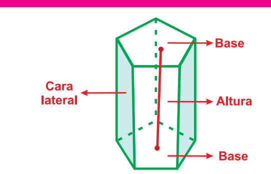
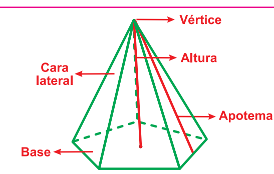
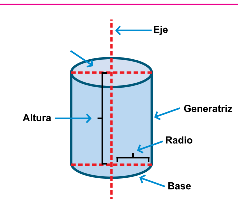
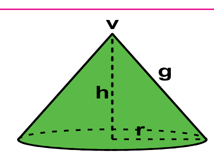
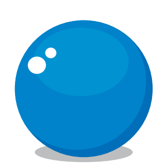
No olvidemos que:

Las razones trigonométricas nos ayudan a resolver problemas donde podemos calcular alturas de gran longitud, sin necesidad de medir dicha altura.

$$sen = \frac{CO}{HIP}; \quad \cos = \frac{CA}{HIP};: \quad \tan = \frac{CO}{CA}; \quad \sec = \frac{1}{\cos}; \csc = \frac{1}{sen}; ctg = \frac{1}{\tan}$$

Gráficamente, podemos determinar cuándo dos figuras son semejantes, por medio del Teorema de Tales.

Es necesario tener presente las fórmulas de área y volumen de los diferentes sólidos.

Solido		Fórmula	Grafica
Prisma	Área lateral (cara lateral)	$A_L = h.P_B$	
	Área total	$A_T = A_L + 2A_B$	
	Volumen	$V = A_B.h$	
Pirámide	Área lateral	$A_L = n.A$	
	Área total	$A_T = A_B + A_L$	
	Volumen	$V = \frac{1}{3}(A_B.h)$	
Cilindro	Área lateral	$A_L = (2\cdot\pi\cdot r)h$	
	Área total	$A_T = A_L + 2A_B = (2\cdot\pi\cdot r)h + 2\cdot\pi\cdot r^2 = (2\cdot\pi\cdot r)(h+r)$	
	Volumen	$V = A_B\cdot h = \pi\cdot r^2\cdot h$	
Cono	Área lateral	$A_L = \pi\cdot r\cdot g$	
	Área Total	$A_T = A_L + A_B = \pi\cdot r\cdot g + \pi\cdot r^2 = \pi\cdot r(g+r)$	
	Volumen	$V = \frac{1}{3}A_B\cdot h = \frac{1}{3}(\pi\cdot r^2\cdot h)$	
Esfera	área total	$A_T = 4\cdot\pi\cdot r^2$	
	Volumen	$A_T = 4\pi\cdot r^2$ $V = \frac{4}{3}\pi\cdot r^3$	

Mundo rural

Ayuda al guiado en labores agrícolas con elevad o ancho de trabajo mediante AGROSAT

Con el aumento en precisión de los receptores de posicionamiento GPS, varios han sido los productos destinados al guiado de tractores en parcelas agrícolas; es un sistema de guiado cuya característica fundamental es su adaptabilidad a parcelas de geometría irregular.

Los sistemas de guiado basados en GPS

En los últimos 5 años, han surgido en el mercado productos destinados a la asistencia al guiado basados en GPS para aplicaciones agrícolas con elevado ancho de trabajo. Su principal destino ha sido la distribución de fertilizantes y la aplicación de herbicidas en parcelas cerealistas. En el resto de aplicaciones agrícolas como labores de arada, preparación del terreno, y siembra, estos productos no aportan ventajas a una conducción tradicional visual.

El total de productos que actualmente se ofertan en el mercado no supera la docena. Dichos productos, la mayoría de origen estadounidense, están orientados a trabajar en parcelas grandes y de geometría regular, e indican al operario el sentido y la magnitud de lo que tienen que mover el volante en cada momento para realizar una pasada paralela a la pasada anterior.

La empresa nacional GMV Sistemas especializada en la realización de proyectos de ingeniería avanzada y en particular de sistemas de navegación por satélite, acaba de lanzar al mercado su producto AGROSAT.

"Hemos detectado una demanda creciente de este tipo de productos en el sector, que cada vez son más solicitados ya que facilitan la labor así como la reducción de los costes de operación. Asimismo, se han cuidado al máximo distintos aspectos en el diseño del producto, como la adecuación al tipo de parcelas que se da en nuestra región y en el territorio nacional, al tiempo que se ha hecho un esfuerzo importante por facilitar en lo posible todos los aspectos de manejo del dispositivo".

El dispositivo AGROSAT, proporciona prestaciones similares a los que ya existen en el mercado añadiendo nuevas funcionalidades: se adapta a parcelas de geometría irregular, en la Figura 1 se muestran los elementos de AGROSAT, así como su instalación en un tractor agrícola.

Instalación de AGROSAT

La instalación de AGROSAT es extremadamente sencilla. Se coloca en el salpicadero del tractor y dispone de dos entradas; una toma de corriente de 12 voltios, y el cable de la antena receptora GPS, que se coloca en la parte superior externa de la cabina del tractor.

Tomado de: http://www.mappinginteractivo.com/plantilla-ante.asp?id_articulo=1410)

AGROSAT instalado en el tractor.

AGROSAT

Dato curioso

Los egipcios: primeros topógrafos

Cuando las inundaciones del Nilo dejaban cubiertas de fértil limo sus riberas, los egipcios medían la tierra para repartirla entre los cultivadores por medio triángulos y polígonos; así nació la geometría (del griego geo = tierra, metron = medida).

Los egipcios además formaban a partir de cuerdas, divididas por nudos de 3, 4 y 5 unidades de longitud, triángulos con un ángulo recto exacto.

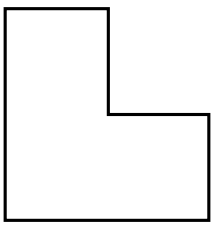
Fue tal la importancia de su saber geométrico, que a uno de los lados del triángulo rectángulo (cateto), le llamaban "Piremus" de cuyo nombre se deriva la palabra pirámide, figura central de toda la cultura egipcia

¿En qué vamos?

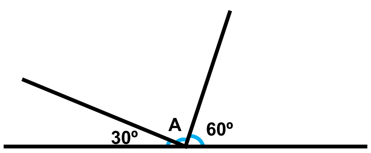
Reflexiono y trabajo con mis compañeros

Resuelve cada ejercicio en tu cuaderno.

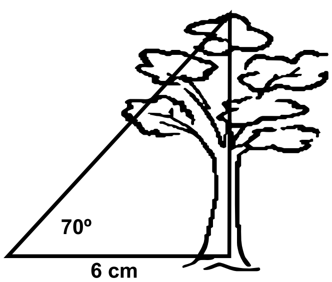
1. Un padre desea dividir el terreno de la figura entre sus cuatro hijos, pero de tal forma que a todos les toque la misma forma geométrica. ¿Cómo puede hacerlo?



2. ¿Cuál es el ángulo que forman las manecillas de un reloj si son las 12 y 15?

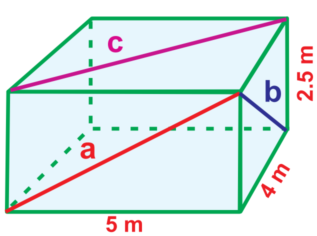


3. ¿Cuánto vale el ángulo A?
4. Un árbol proyecta una sombra de 6 m. si los rayos del Sol forman un ángulo de 70º respecto al piso, calculemos la altura del árbol.

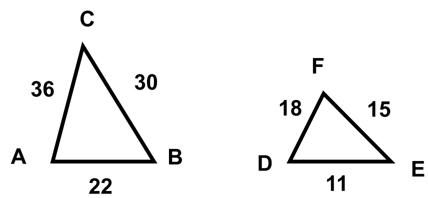


Según la figura, calcula:

5. Diagonal a.
6. Diagonal b.
7. Diagonal c.



Responde las preguntas 8, 9 y 10 a partir de las siguientes figuras:



8. Respecto al triángulo ABC es falso afirmar que:

   a) es un triángulo escaleno.
   b) sel mayor de sus ángulos es el ángulo ABC.
   c) es un triángulo isósceles.
   d) el menor de sus ángulos es el ángulo ACB.

9. Es posible afirmar que el triángulo ABC es semejante al triángulo DEF porque:

   a) poseen la misma forma y orientación
   b) sus lados correspondientes son proporcionales.
   c) cada lado de ABC es mayor que cada lado de DEF.
   d) cada lado de ABC es menor que cada lado de DEF.

10. Para el ángulo DFE se verifica que.

   A. es congruente con $\angle CAB$
   B. es congruente con $\angle FED$
   C. es congruente con $\angle ACB$
   D. es congruente con $\angle FDE$

Le cuento a mi profesor

Con tu profesor, resuelve la siguiente rejilla.
Lee el enunciado y señala con una x la categoría correspondiente, según lo que has aprendido.

Qué sé hacer	Superior	Alto	Básico	Bajo
Calculo el área lateral, total y el volumen de un prisma.				
Calculo el área lateral, total y el volumen de una pirámide.				
Calculo el área lateral, total y el volumen de un cono.				
Calculo el área lateral, total y el volumen de una esfera.				
Calculo el área lateral, total y el volumen de un cilindro.				
Resuelvo problemas que involucran el cálculo de áreas o volúmenes de sólidos.				
Resuelvo triángulos rectángulos utilizando razones trigonométricas.				
Aplico las razones trigonométricas de ángulos de 30º, 45º, 60º en la resolución de triángulos rectángulos y problemas asociados con éstos.				
Resuelvo problemas prácticos por medio de triángulos rectángulos.				
Encuentro las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.				
Utilizo la definición de semejanza para determinar si dos figuras son o no semejantes, utilizando el Teorema de Tales.				

Autoevaluación

Participo y aprendo	Superior	Alto	Básico	Bajo
Participo de manera activa en clase, formulando o respondiendo preguntas.				
Aplaudo las actitudes creativas que inviten a buscar nuevas soluciones a situaciones problemáticas.				
Participo activamente en los grupos de trabajo.				
Comparto mis saberes y dudas con mis compañeros.				
Fomento la disciplina dentro del grupo.				
Permito la libre discusión.				
Propongo problemas o actividades para resolver en clase.				
Repaso en casa lo suficiente, sobre lo aprendido en el colegio.				

Funciones: Lineal, cuadrática, exponencial y logarítmica, y sistemas lineales

Resolvamos

Te has preguntado: ¿Qué importancia tienen las funciones en nuestra vida?

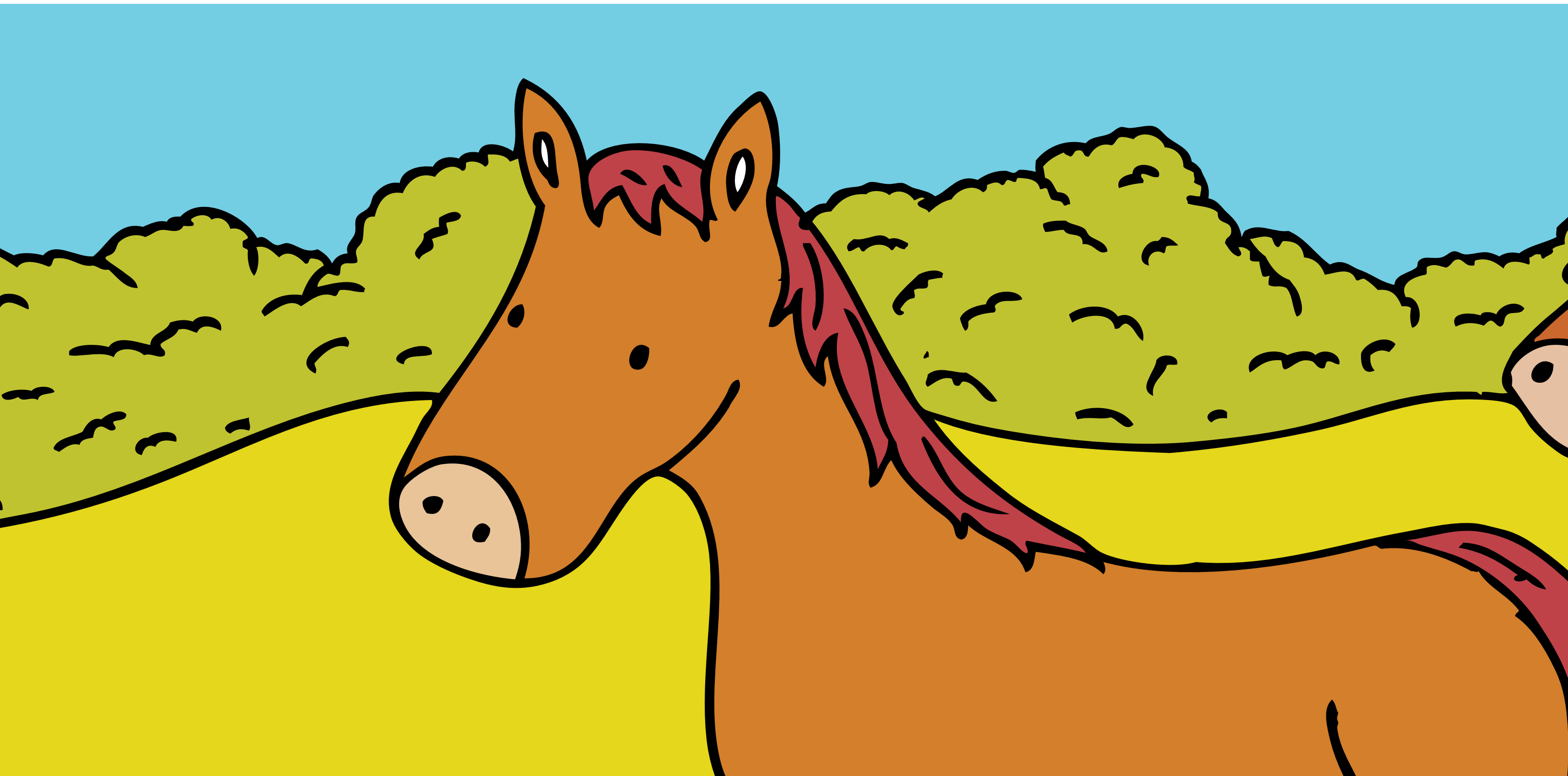
Cuando un cuerpo se ve primero en un lugar y luego en otro, es lógico decir que se desplaza; pero si no se observó en cada instante ese cambio de posición, es difícil saber qué tan rápido lo hizo.

La velocidad es el cambio de posición en un tiempo determinado.

La aceleración es el cambio de velocidad en un tiempo determinado.

En la vida diaria, conocemos diferentes movimientos: cuando caminamos, cuando vamos en un vehículo, cuando montamos a callo, etc.

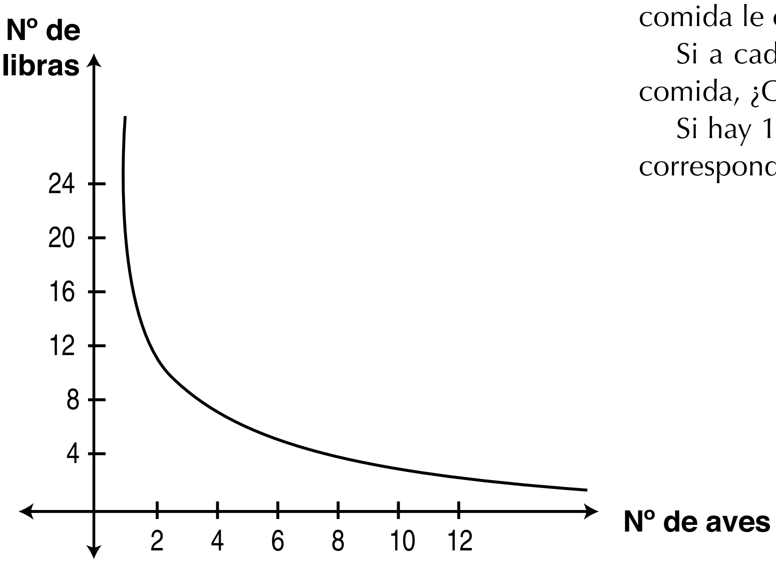
Todas esas actividades pueden analizarse matemáticamente a través de análisis de variables que constituyen las funciones y son el objeto de estudio de esta unidad



Referentes de calidad	Capítulos
Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.	1. Funciones y ecuaciones lineal y cuadrática 2. Funciones Exponencial y logarítmica
Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.	
Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas	
Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.	
Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.	
Analizo los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales.	
Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.	
Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan.	
Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familia de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.	

Funciones lineal y cuadrática

Pedro tiene un galpón y ha registrado la relación existente entre el número de aves y ración de comida, en libras, por ave.

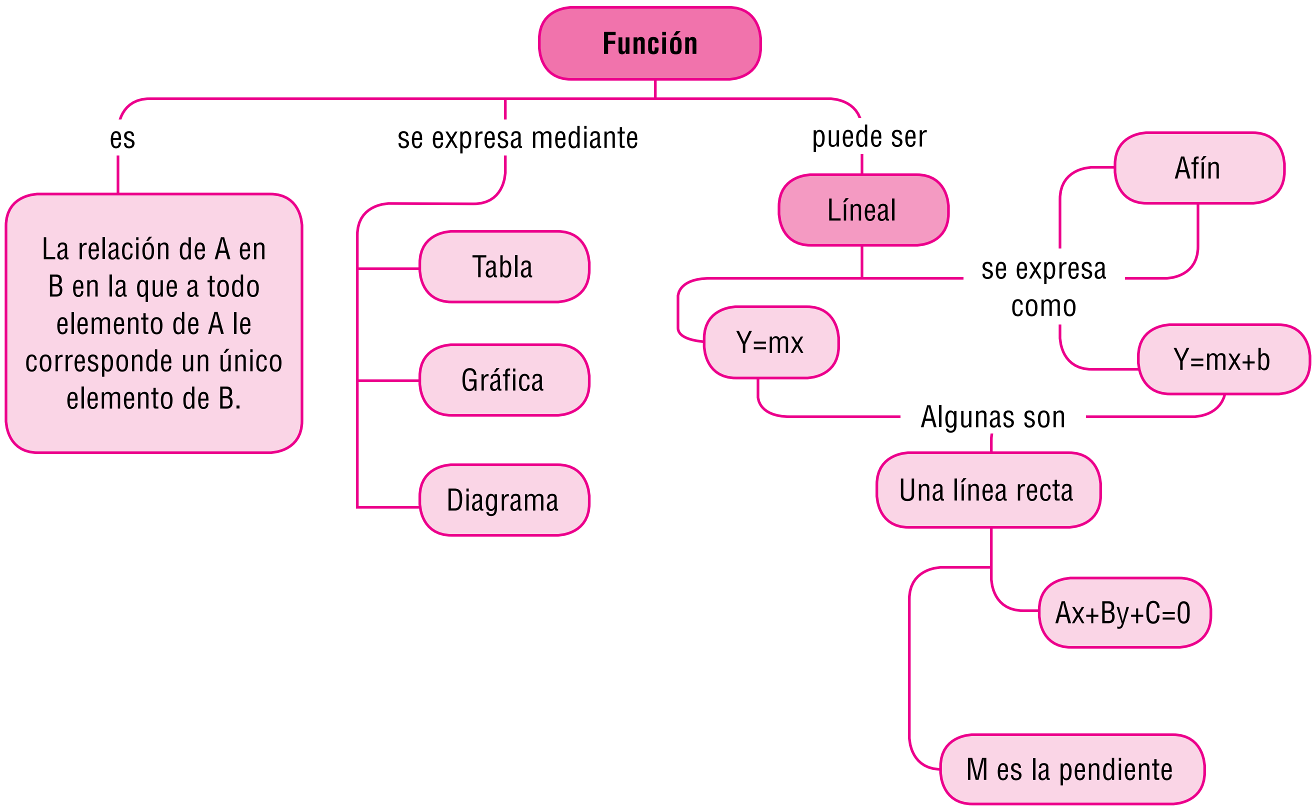


En gráficas como ésta puedes encontrar la información que da respuesta a algunas preguntas como:

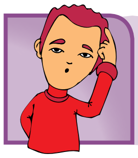
Si en el corral hay 6 aves, ¿Cuántas raciones de comida le corresponden a cada una?

Si a cada ave le corresponden dos raciones de comida, ¿Cuántas aves hay en el corral?

Si hay 10 aves, ¿Cuántas raciones de comida le corresponden a cada una?



Tema 1. Funciones y ecuaciones lineales



Indagación
¿Mi velocidad de crecimiento y mi peso están relacionados?

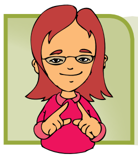
Las tablas de crecimiento son cuadros de medidas que permiten valorar y comparar el crecimiento de niños, jóvenes y adultos en relación con un grupo estándar. Las tablas de crecimiento aceptadas a nivel nacional se basan en datos de mediciones recopilados por el Centro Nacional de Estadísticas en Salud. Los parámetros que se miden, principalmente en ellas son la estatura y el peso.

En los niños y jóvenes deportistas es especialmente importante hacer un seguimiento permanente de los cambios de peso y estatura. Esto se realiza mediante la elaboración de las curvas de crecimiento y aumento de peso, elaboradas por los médicos y nutricionistas, las cuales se basan en las tablas y gráficas de crecimiento del Instituto Colombiano de Bienestar Familiar (ICBF). Analicemos la tabla siguiente:

Velocidad de crecimiento al año		
Edad (años)	**Estatura (cm)**	**Peso (kg)**
10-11	6	4
11-12	6.5	5
12-13	6.5	5
13-14	7	5
14-15	6	6.5
15-16	4	5.5
16-17	3	4
17-18	1.5	3

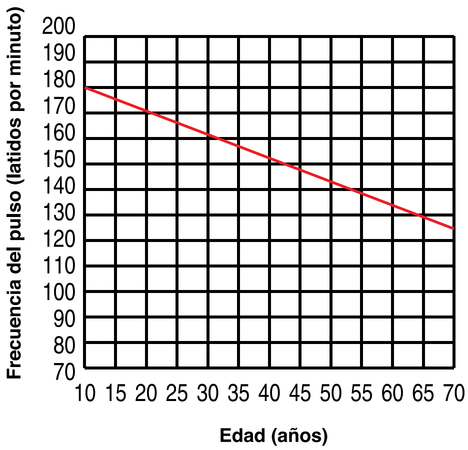
1. Qué sucede con el peso de un adolescente a medida que aumenta su edad?
2. Qué sucede con la estatura de un adolescente a medida que aumenta su edad?
3. Identifica la variable independiente y la variable dependiente de la tabla anterior.
4. Entre qué edades se espera que un adolescente crezca más rápido?

Función (*f*) a la relación entre un conjunto dado X (llamado dominio) y otro conjunto de elementos Y (llamado codominio) de tal forma que a cada elemento x del dominio le corresponde un único elemento $f(x)$ del codominio (los que forman el recorrido, también llamado rango o ámbito).



Conceptualización

Observa la siguiente grafica y con tus compañeros de grupo resuelve:



1. ¿Cuál es el límite mínimo de la frecuencia del pulso para una persona de 20 años?
2. ¿Cuál es el límite máximo de la frecuencia del pulso para una persona de 20 años?
3. ¿Cuál es el límite máximo de la frecuencia del pulso para una persona de 45 años?
4. ¿Cuál es el límite mínimo de la frecuencia del pulso para una persona de 50 años?

Representación gráfica de funciones

Analicemos las situaciones siguientes:

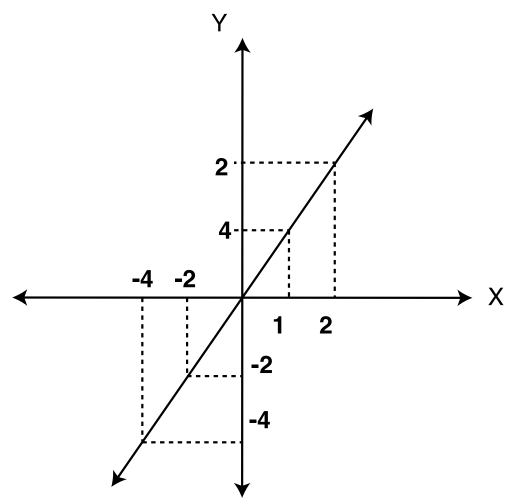
Dada la función: $y = 2x$, ésta puede representarse en el plano cartesiano, así:

Escribimos la expresión algebraica es $y = 2x$, construimos una tabla de valores y después graficamos.

Tabla de valores

x	y	(x,y)
2	4	(2,4)
1	2	(1,2)
0	0	(0,0)
-1	-2	(-1,-2)
-2	-4	(-2,-4)

Gráfica $y = 2x$



Se va dando valores arbitrarios a x

Se calcula el valor de y reemplazando x en $y = 2x$

Se escriben las parejas o puntos (x, y)

Toda función se puede representar por:	Una expresión algebraica Una tabla de valores Una gráfica

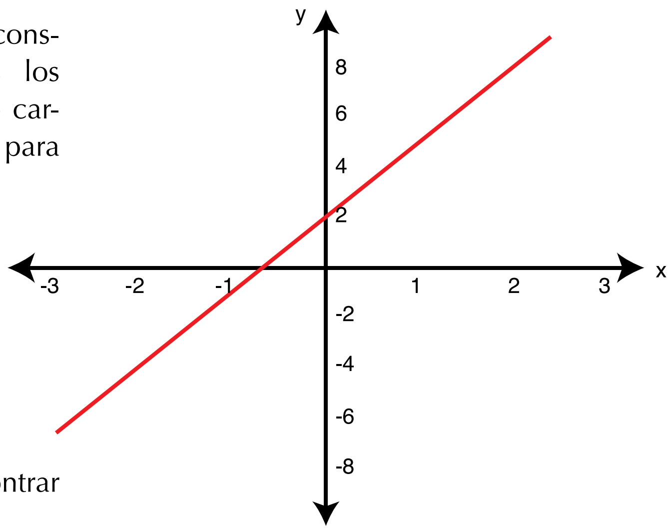
La ecuación lineal es de la forma $y = ax + b$

Para graficar una ecuación de la forma $y = ax + b$, se construye una tabla dándole valores a ***x*** y determinamos los valores de ***y***. Señalamos dichos valores en un plano cartesiano y graficamos. (Mínimos se necesitan 2 puntos para trazar una gráfica).

Analicemos la siguiente ecuación

$y = 3x + 2$

x	0	1	2	-1
y	2	5	8	-1



Si la ecuación no está de la forma: , se puede encontrar de la forma general:

Cómo se grafican estas ecuaciones?

Buscamos las intersecciones con los ejes x e y.

Para determinar la intersección con el eje y, le damos el valor de 0 a x, y despejamos y

Así por ejemplo:

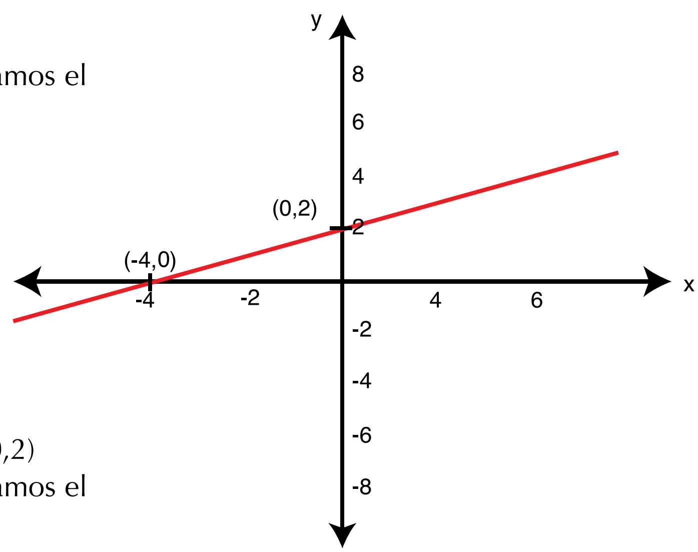
$3x = 6y - 12$, si x=0, entonces

$3.0 = 6y - 12$,

$0 = 6y - 12$

$12 = 6y$

$2 = y.$



La intersección con el eje Y, ocurre en el punto (0,2)

Para determinar la intersección con el eje x, le damos el valor de 0 a y, y despejamos x

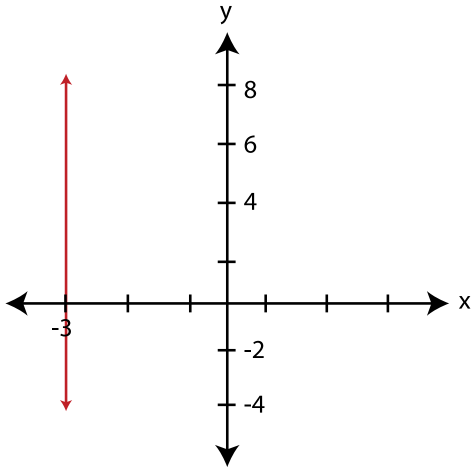
$3x = 6y - 12$

si y=0, entonces, $3x = 6(0) - 12$

$3x = 0 - 12$

$3x = -12$

$$x = \frac{-12}{3} = -4$$



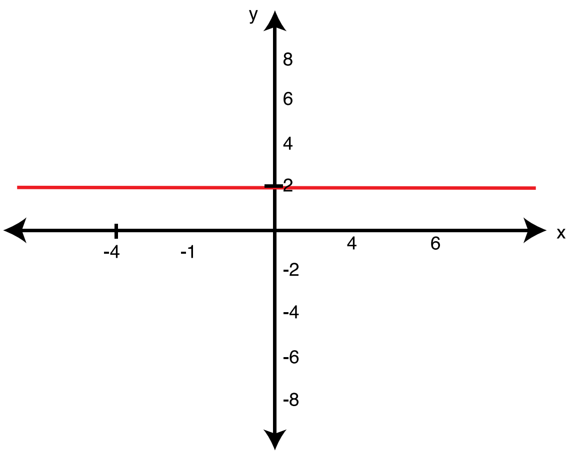
La intersección con el eje x, ocurre en el punto (-4,0).

La gráfica de la ecuación de la forma $x = a$, será una recta vertical paralela al eje y

Representemos la ecuación $x = -3$

Para cada valor de y, x siempre será $= -3$:

(-3,0); (-3,1); (-3,2); (-3,-1); (-3,-3);



La gráfica de la ecuación de la forma $y = b$, dará una recta vertical paralela al eje x

Representemos $y = 2$

Para cada valor de x, y siempre será = 2

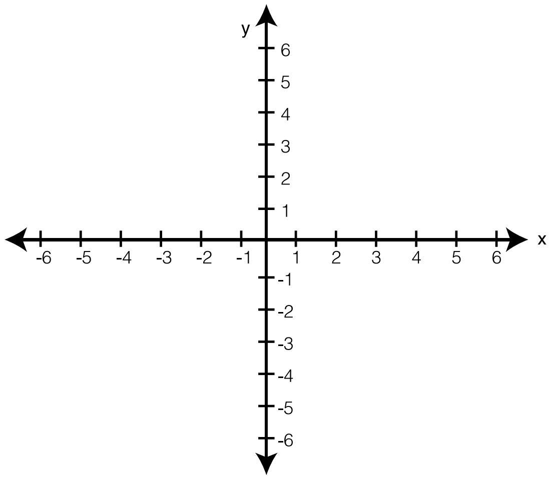
(0,2); (-1,2); (-2,2); (3,2); (1,2) ;

Aplicación

En forma individual, realiza los ejercicios siguientes y después compara tu trabajo con el realizado por tus compañeros.

Para cada una de las funciones siguientes, completa la tabla de valores y realiza la gráfica correspondiente

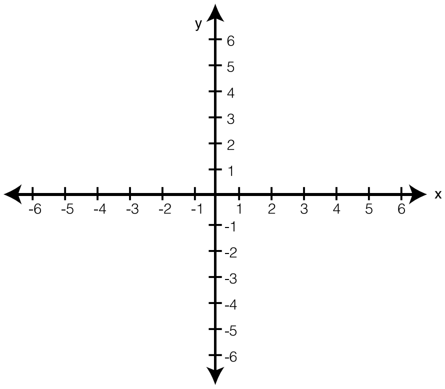
1. $2x = y$ Esta función puede escribirse como $y = 2x$



x					
y					

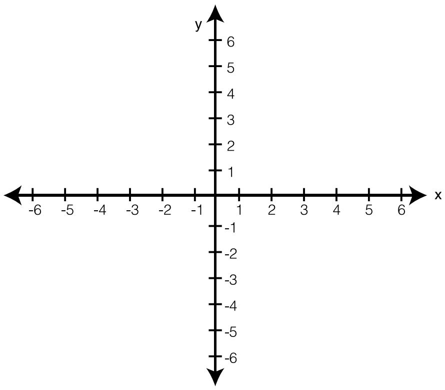
2. $y = -2x + 5$

x					
y					



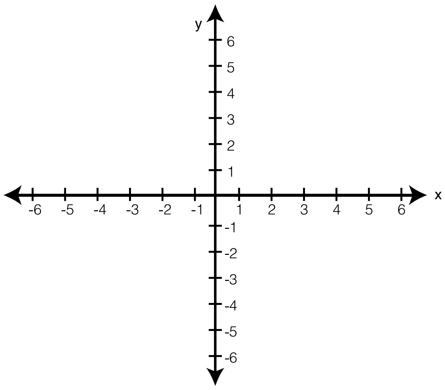
3. $y = -5$

x					
y					



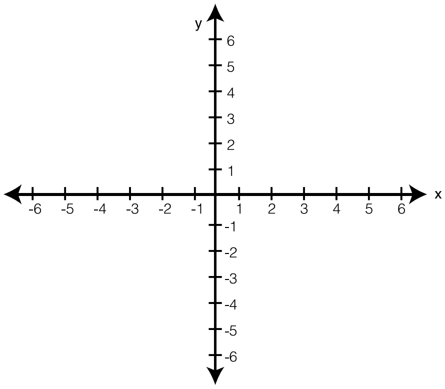
4. Si 3y = – 6 entonces y = ____________

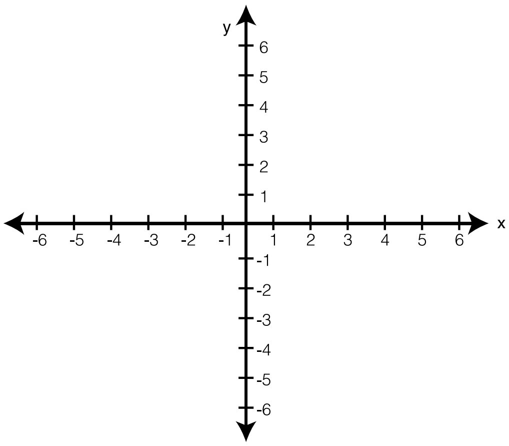
x	0	0.5	1	-1	-2
y					



5. $2x + 1 = 6$

x					
y					





6. 2x = 6

x					
y					

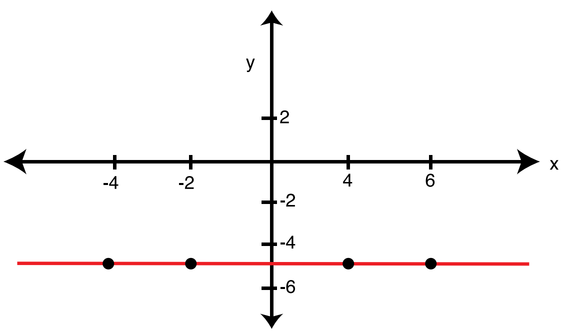
7. En las 10 primeras semanas de cultivo de una planta, que medía 2 cm, se ha observado que su crecimiento es directamente proporcional al tiempo, viendo que en la primera semana ha pasado a medir 2.5 cm. Establece una función a fin que dé la altura de la planta en función del tiempo y representar gráficamente.

x **(semanas)**	1	2	3	4						
y **(crecimiento en cm)**	2.5 cm									

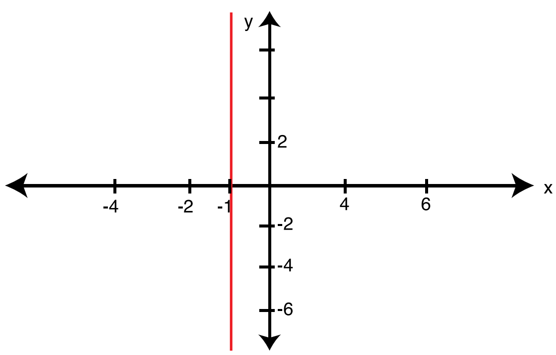
Función: ________________________________

Escribe la expresión algebraica que se encuentra representada en cada plano cartesiano:

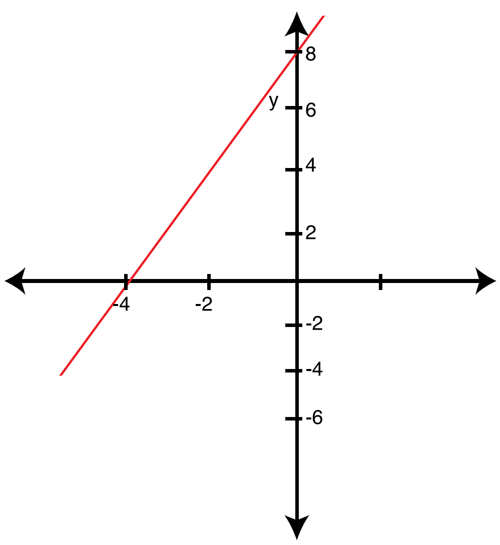
8.



9.

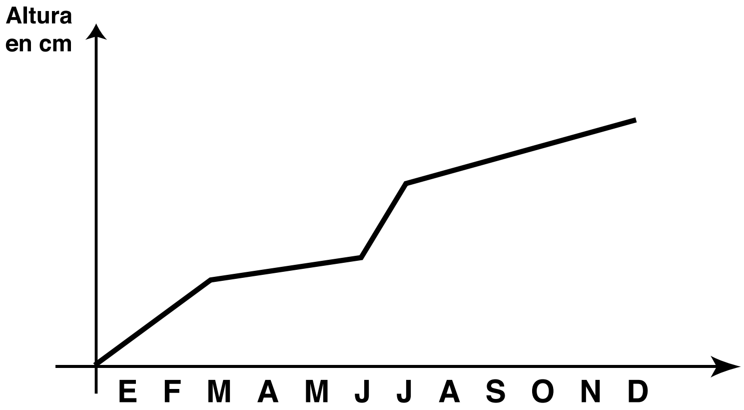


10.



Pendiente de una recta

La siguiente grafica representa el crecimiento de un árbol durante un año.



En la gráfica observamos que cada pedazo tiene su propia inclinación.

Ahora contesta:

¿En cuáles meses se produjo el mayor crecimiento del árbol?

¿Fue uniforme el crecimiento del árbol?

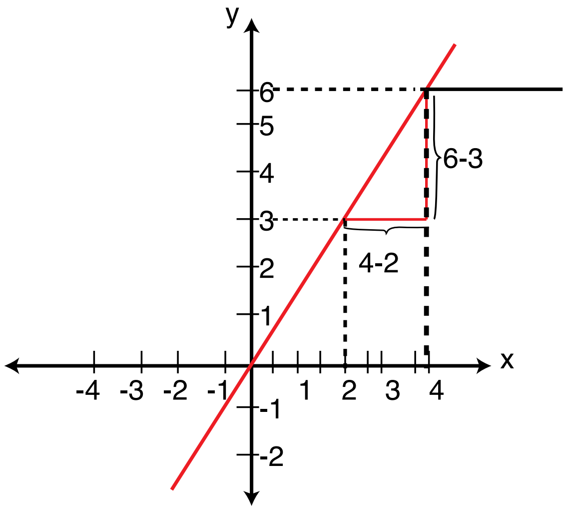
¿En cuáles meses se produjo el menor crecimiento del árbol?

Para ver qué tan inclinada está una recta, es decir, "qué tan pendiente" está una recta, procedemos así:

Tomamos dos puntos de ella, por ejemplo los puntos P(2,3) y Q(4,6). En el triángulo rectángulo que se forma, establecemos la razón entre sus catetos opuesto y adyacente al ángulo P y la llamamos m.

Esto es:

$$m=\frac{6-3}{4-2}=\frac{3}{2}=1.5$$



En general, si llamamos $(x_1.y_1)$ a P y $(x_2.y_2)$ a Q,

Esto es: $(x_{1.}y_1) = P$ y $(x_2.y_2) = Q$,

expresaremos la pendiente $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

La pendiente m sirve para determinar la ecuación de la recta.

¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(2,3) y Q(4,6)?

Hemos dicho que: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, de donde podemos

decir que $m(x_2-x_1) = (y_2-y_1)$

Sabemos que $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{6-3}{4-2} = \frac{3}{2}$

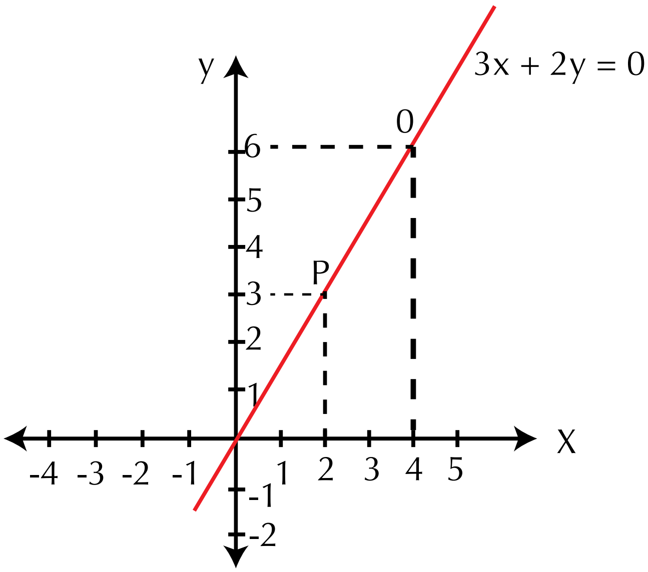
Reemplazado un punto de la recta, por ejemplo P(2,3) y

$m = \frac{3}{2}$ en $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ tenemos: $\frac{3}{2} = \frac{y_2-3}{x_2-2}$.

Por la ley fundamental de las proporciones nos queda:

$$3(x_2 - 2) = 2(y_2 - 3)$$
$$3x_2 - 6 = 2y_2 - 6$$
$$3x_2 - 2y_2 = - 6+6$$
$$3x_2 - 2y_2 = 0$$

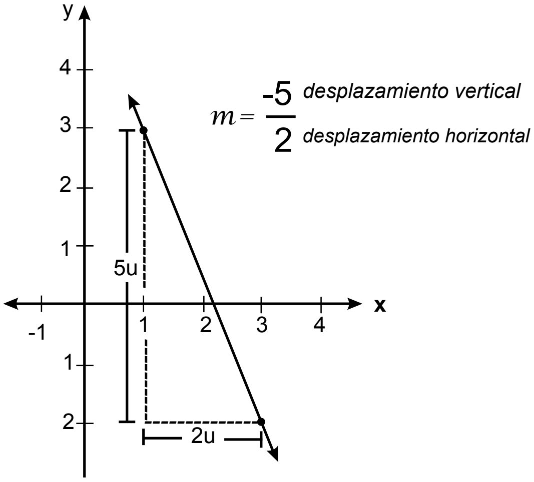
Que podemos escribir como: $3x_2 - 2y_2 = 0$

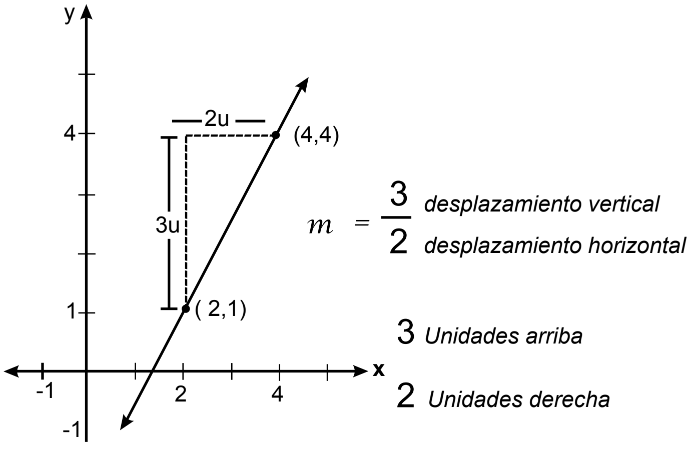


La ecuación de la recta dados: su pendiente m y un puntos (x1 –y1) es y – y1 = m(x –x1) y se conoce con el nombre de ecuación de la forma punto pendiente.
En general, la ecuación de la recta que pasa por el punto (x, y) y tiene pendiente m es: y = mx + b en donde m = es la pendiente y b= es el punto de intersección de la recta con el eje Y

Sobre el plano cartesiano, la pendiente muestra el desplazamiento tanto vertical como horizontal

Para representar las rectas, primero se ubica el punto dado y a partir de allí, se realizan los desplazamientos horizontal y vertical que indique la pendiente, así:





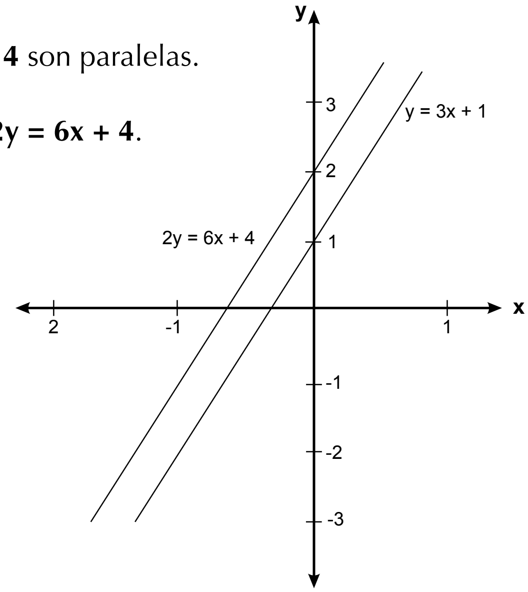
Posiciones de dos rectas en el plano

1. **Paralelas: *Si dos rectas tienen la misma pendiente, entonces son paralelas.***

Analicemos si las dos rectas: **y = 3x + 1** y **2y = 6x + 4** son paralelas.
La pendiente de la recta **y = 3 x + 1** es $\mathbf{m_1 = 3}$
Ahora, veamos cómo es la pendiente de la ecuación **2y = 6x + 4**.
Despejando la incógnita y tenemos:

$$y = \frac{6x+4}{2} = \frac{6x}{2} + \frac{4}{2} = \frac{6x}{2} + \frac{4}{2} = 3x+2$$

Como **2y = 6x + 4** es equivalente a **y= 3x+2**
y su pendiente es $\mathbf{m_2 = 3}$, concluimos son paralelas.



Perpendiculares: *Si la pendiente de una es el recíproco negativo de la otra, lo cual significa que dos rectas son perpendiculares si su producto es -1.*

Analicemos si las dos rectas: **3y +2x = - 1** y **2y -3x = -1** son perpendiculares.

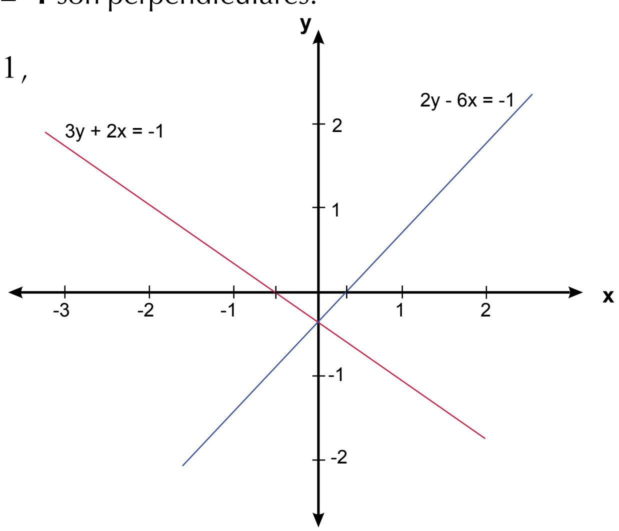
De la ecuación 3**y +2x = - 1** tenemos: $y = \frac{-2}{3}x - 1$,

luego su pendiente es $m_1 = \frac{-2}{3}$

De la ecuación **2y -3x = -1** tenemos: $y = \frac{3}{2}x - 1$,

luego su pendiente es $m_2 = \frac{3}{2}$

Por lo tanto: $m_1 \cdot m_2 = \frac{-2}{3} x \frac{3}{2} = -1$



Concluimos que las rectas **3y +2x = - 1** y **2y -3x = -1** son perpendiculares.

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Cuando tenemos un sistema de dos ecuaciones, cada una de ellas con dos incógnitas (x,y u otras letras), puede ser que al graficarlas nos resulten:

Paralelas, lo que significa que no tienen puntos comunes, entonces no tienen solución.

Intersecantes en un punto es decir que se corten en un punto y ese punto es la solución de ellas porque nos da el valor para cada incógnita.

Que coincidan en todos los puntos, entonces son la misma ecuación y tendrán infinitas soluciones.

Existen varios métodos para la solucionar un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas y pueden utilizarse cualquiera de ellos, pero no olvides siempre verificar su solución.

Estos métodos son: Gráficamente, por sustitución, por igualación o por reducción.

Gráficamente o método gráfico

En la compra de un cuaderno y un lapicero se pagan $8,000, ¿cuál es el precio de cada artículo, si la diferencia de ambos es de $2,000?

Seguramente puedes dar una respuesta inmediata.

Organicemos lo datos:

Cuaderno = x   Precio del cuaderno
Lapicero = y   Precio del lapicero

Las ecuaciones son:

$$x + y = 8{,}000 \text{ (Ecuación 1)}$$
$$x - y = 2{,}000 \text{ (Ecuación 2)}$$

Estas dos ecuaciones son las que representan la situación del problema.

Las ecuaciones 1 y 2 forman un sistema de ecuaciones de primer grado, llamadas también ecuaciones simultáneas de primer grado con dos incógnitas.

Analicemos cómo se resuelve el sistema de ecuaciones que representan la situación del problema, por método gráfico:

$$x + y = 8{,}000$$
$$x - y = 2{,}000$$

Despejando la y de la ecuación 1 se tiene: $y = 8{,}000 - x$

Despejando a y de la ecuación 2 se tiene: $-y = 2\,000 - x$, es decir, $y = -2{,}000 + x$

Para efectos de tabulación y de gráfica vamos a adoptar una escala de 1:1,000, es decir cada valor de las parejas representa unidades de mil y cada punto de las rectas en el gráfico también representa miles.

Tabulando estas dos expresiones con x= 1000, 2000, 3000, 4000, se obtiene:

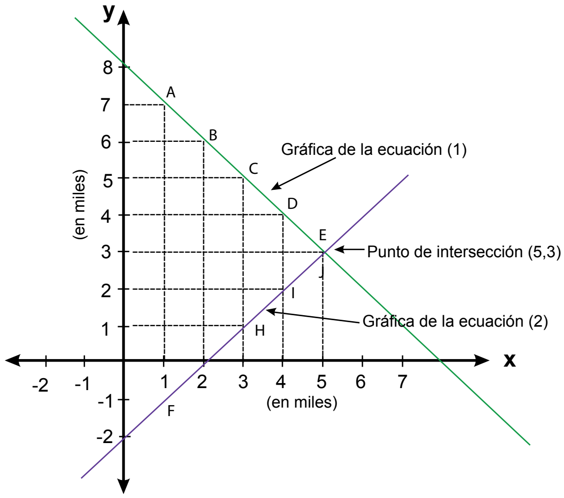
Tabulación de la ecuación 1
$y = 8{,}000 - x$

x	y	Punto (x,y)
1	7	A(1,7)
2	6	B(2,6)
3	5	C(3,5)
4	4	D(4,4)
5	3	E(5,3)

Tabulación de la ecuación 2
$y = x - 2{,}000$

x	y	Punto (x,y)
1	-1	F(1,-1)
2	0	G(2,0)
3	1	H(3,1)
4	2	I(4,2)
5	3	J(5,3)

Localizando los puntos A, B, C, D, E, F, G, H, I y J en el plano cartesiano, tenemos:



Observemos que las gráficas de las ecuaciones se cortan en un lugar que corresponde a los puntos E y J; por lo tanto, las coordenadas de dicho punto son **x=5** y **y = 3**.

Como 5 y 3 representan miles, entonces la solución al problema es: **x = 5,000**; **y = 3,000**.

En el sistema que representa la situación del problema, se sustituyen las dos variables por los valores hallados, para comprobar que la solución es correcta.

Reemplazamos en la ecuación 1:

$$x + y = 8{,}000$$
$$5{,}000 + 3{,}000 = 8{,}000$$
$$8{,}000 = 8{,}000$$

Reemplazamos en la ecuación 2

$$x - y = 2{,}000$$
$$5{,}000 - 3{,}000 = 2{,}000$$
$$2{,}000 = 2{,}000$$

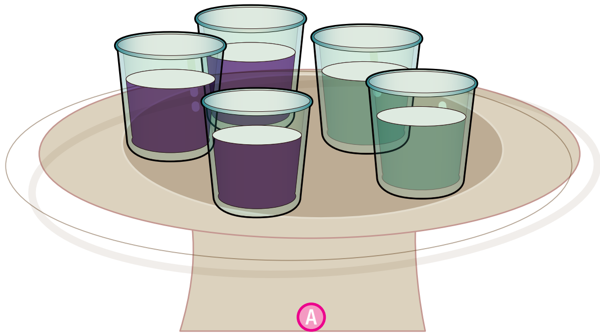
De acuerdo con lo anterior, el precio de cada artículo es: **Cuaderno: $5,000 y lapicero: $3,000**

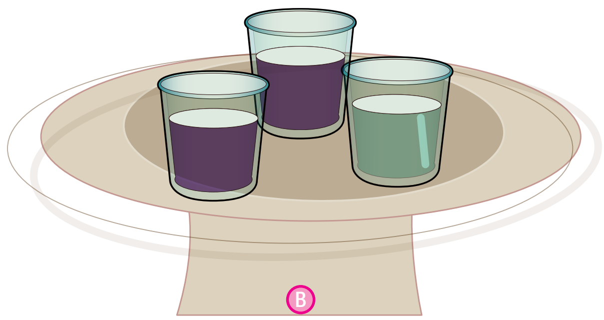
De esta forma, se dice que el sistema es compatible o consistente, cuando en las gráficas se cortan las rectas en un punto de intersección.

Concluyendo, podemos decir que:

El método gráfico consiste en trazar la gráfica que corresponde a cada ecuación, en el plano cartesiano, determinar el punto en que se cortan dichas gráficas, que es su solución y que pertenece simultáneamente a las dos rectas trazadas.

Método de Sustitución





En la mesa A se sirvieron 3 jugos de frutas y 2 limonadas y se pagaron \$13 500.
En la mesa B se sirvieron 2 jugos y una limonada, la cuenta fue de \$8 500.
¿Cuál es el valor de un jugo y cuál el valor de una limonada?

Haz algunos tanteos sucesivos, antes de proceder con lápiz y papel y llama **j** al jugo y **l** a la limonada.

La ecuación para la mesa A es: $3j + 2l = 13{,}500$ Ecuación 1

La ecuación para la mesa B es: $2j + 1l = 8{,}500$ Ecuación 2

Despejamos la incógnita l en Ecuación 2: $l = 8\,500 - 2j$

Reemplazamos o sustituimos en Ecuación 1 el valor encontrado para l

$$3j + 2(8{,}500 - 2j) = 13{,}500$$
$$3j + 17{,}000 - 4j = 13{,}500$$
$$3j - 4j = 13{,}500 - 17{,}000$$
$$-j = -3\,500$$
$$j = 3{,}500$$

Ahora reemplazamos el valor de j en Ecuación 1:

$$3j + 2l = 13{,}500$$
$$3(3{,}500) + 2l = 13{,}500$$
$$7{,}000 + 2l = 13{,}500$$
$$2l = 13{,}500 - 7{,}000$$
$$2l = 6{,}500$$
$$l = 6{,}500 \div 2$$
$$l = 3{,}250$$

El procedimiento general del método de sustitución consiste en:

1. Despejar una variable en función de la otra, en alguna de las dos ecuaciones.
2. Sustituir la variable despejada en la otra ecuación.
3. Resolver la ecuación resultante, y encontrar el valor de una variable.
4. Sustituir el valor hallado en cualquiera de las ecuaciones originales del sistema, para encontrar el valor de la otra variable.
5. Comprobar en ambas ecuaciones los valores encontrados.

Método de igualación

Analicemos la situación siguiente:

Isidro y Juan sembraron maíz en parcelas contiguas. Si juntas miden 860 m^2 de área y la parcela de Isidro mide 120 m^2 más que la de Juan, ¿cuál es el área de cada parcela?

Solución:

Se simbolizan las incógnitas con variables:

x = área parcela de Isidro
y = área parcela de Juan

Planteando el problema por medio de un sistema de ecuaciones se tiene:

$$x + y = 860$$
$$x = y + 120$$

Si se despeja en ambas ecuaciones la misma incógnita, se tendrá:

$$x = 860 - y \quad x = y + 120$$

Como el primer miembro en ambas ecuaciones es el mismo, en este caso es x, se igualan los segundos miembros y se halla el valor de una incógnita.

$$\left.\begin{array}{l} x = 860 - y \\ x = y + 120 \end{array}\right\} \quad \text{De aquí concluimos que} \quad \begin{array}{r} 860 - y = y + 120 \\ 860 - 120 = y + y \\ 740 = 2y \\ y = 370 \end{array}$$

Al sustituir el valor de *y* en alguna de las dos ecuaciones se encuentra el valor de la otra incógnita.

$$x = y + 120$$
$$x = 370 + 120$$
$$x = 490$$

Por tanto, la parcela de Isidro mide 490 m^2 y la de Juan 370 m^2.

Al comprobar los valores encontrados en las dos ecuaciones, se tiene:

$$\begin{array}{lcl} x + y = 860 & \quad & x = y + 120 \\ 490 + 370 = 860 & & 490 = 370 + 120 \\ 860 = 860 & & 490 = 490 \end{array}$$

El procedimiento general del método de igualación consiste en:

1. Se despeja en ambas ecuaciones la misma incógnita.
2. Se Igualan los segundos miembros y se halla el valor de una incógnita.
3. Se sustituye este valor en alguna de las ecuaciones para hallar el valor de la otra incógnita.
4. Se comprueban los valores encontrados en las dos ecuaciones.

Por reducción o cancelación

Solucionemos el sistema de ecuaciones:

$$x + 2y = 10$$
$$-x + y = -1$$

Se observa en el sistema anterior que las x son simétricas, por lo cual es posible sumar ambas ecuaciones y eliminar dicha literal.

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10 \\ -x + y &= -1 \\ 0 + 3y &= 9 \end{aligned}$$

dividiendo por 3 ambos miembros de la igualdad $3y = 9$, obtenemos $y = 9$

Sustituyendo el valor de y en una de las ecuaciones, se puede obtener el valor de x:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10 \\ x + 2(3) &= 10 \\ x + 6 &= 10 \\ x + 6 - 6 &= 10 - 6 = 4 \end{aligned}$$

Comprobamos sustituyendo ambos valores en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} -x + y &= -1 \\ -4 + 3 &= -1 \\ -1 &= -1 \end{aligned}$$

El procedimiento general del método de reducción o cancelación consiste en:

1. Eliminar una de las dos incógnitas por medio de la suma o resta de las ecuaciones.
2. Sustituir el valor encontrado en una de las ecuaciones.
3. Comprobar los resultados en la otra ecuación.

Aplicación

Copia los ejercicios siguientes en tu cuaderno, resuélvelos y compara tus respuestas con algunos compañeros.

Resuelve por el método gráfico:

1. Un joven compró 2 conejos y un pollo, pagó por ello \$ 35,000. Otro joven adquirió 1 conejo y 3 pollos y le cobraron un total de \$ 35,000. ¿Cuál era el precio de cada conejo y de la gallina, si los objetos eran idénticos?

2. $\begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ -3x - 2y = -1 \end{cases}$

Resuelve por el método de sustitución:

3. María vende pollos en el mercado. Los pollos pequeños los vende a \$ 12 000 y los más grandes a \$20 000. Al finalizar el día había vendido un total de 9 pollos y recaudó \$ 140 000. ¿Cuántos pollos de cada tamaño vendió?

4. $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases}$

Resuelve por el método de Igualación

5. Pedro y Armando empacan fruta en cajas. Las cajas de pera deben pesar 25 kg y las de manzana 40 kg; al terminar su turno han empacado entre los dos un total de 25 cajas con un peso de 790 kg. ¿Cuántas cajas de pera empacaron y cuántas de manzana?

6. $\begin{cases} 8x - 3y = 7 \\ 8y - 3x = 18 \end{cases}$

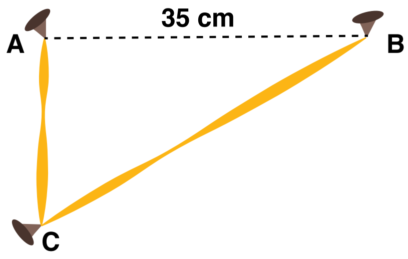
Resuelve por el método de reducción

7. $\begin{cases} 6x - 4y = 12 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$

8. Juan compró 2 lechugas y una papaya, pagó por ello \$ 10,000 y Luís compró 1 lechuga y 1 papaya iguales a las de Juan, en \$ 6,000. ¿Cuánto cuesta cada lechuga y cada papaya?

Resuelve por el método que tú quieras

9. Una pita de 49 cm de largo se fija a tres clavos como
lo indica el dibujo. Los clavos A y B están separados 35 cm y el clavo C se colocó para tensionar la pita y formar en A un ángulo recto. Así se tiene que el triángulo ABC es rectángulo. Calcula las longitudes AC y BC.
Pista: Utiliza el teorema de de Pitágoras.
Además tú sabes que: y2 – x2 = (y + x) (y – x)



10. $$\begin{cases} \frac{1}{4}x+\frac{1}{3}y=6 \\ x+\frac{2}{3}y=16 \end{cases}$$

Entendemos por…

Rectas paralelas aquellas que nunca se cortan. Las líneas rectas que tienen la misma pendiente son paralelas.
Rectas perpendiculares aquellas que se cortan formando cuatro ángulos rectos. El producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares es igual a -1.

Diversión matemática

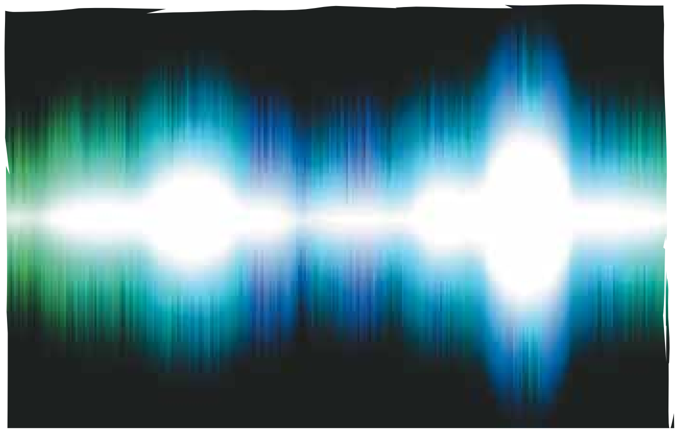
Números narcisistas

El número 153 tiene la propiedad de ser igual a la suma de los cubos de sus cifras, así:
$1^3 + 5^3 + 3^3 = 1 + 125 + 27 = 153$. Esta propiedad también la cumplen: 370, 371 y 497. Compruébalo.

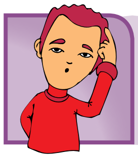
Día a día

El sonido es cualquier fenómeno que involucra la propagación en forma de ondas elásticas audibles o casi inaudibles, a través de un medio elástico que genera el movimiento vibratorio de un cuerpo. La propagación del sonido implica transporte de energía en forma de ondas mecánicas que se propagan a través de la materia sólida, líquida o gaseosa.La velocidad de propagación del sonido varía dependiendo de los cambios de temperatura del medio a través del cual viajan las ondas sonoras.
Por ejemplo, sobre una superficie nevada, el sonido se desplaza atravesandograndes distancias, debido a las refracciones producidas bajo la nieve. Cada capa de nieve tiene una temperatura diferente. Así las capas más profundas donde no llega el sol, están más frías que las superficiales, y por tanto, en estas el sonido se propaga con menor velocidad.En el aire, la velocidad del sonido a una temperatura de 20ºC es de 343 m/s, en tanto que a 0ºC, la velocidad es de 331 m/s, y por cada grado que se incremente la temperatura del aire, la velocidad del sonido aumenta 0,6 m/s.

Tomado de Supermat Matemáticas 7-Ed. Voluntad



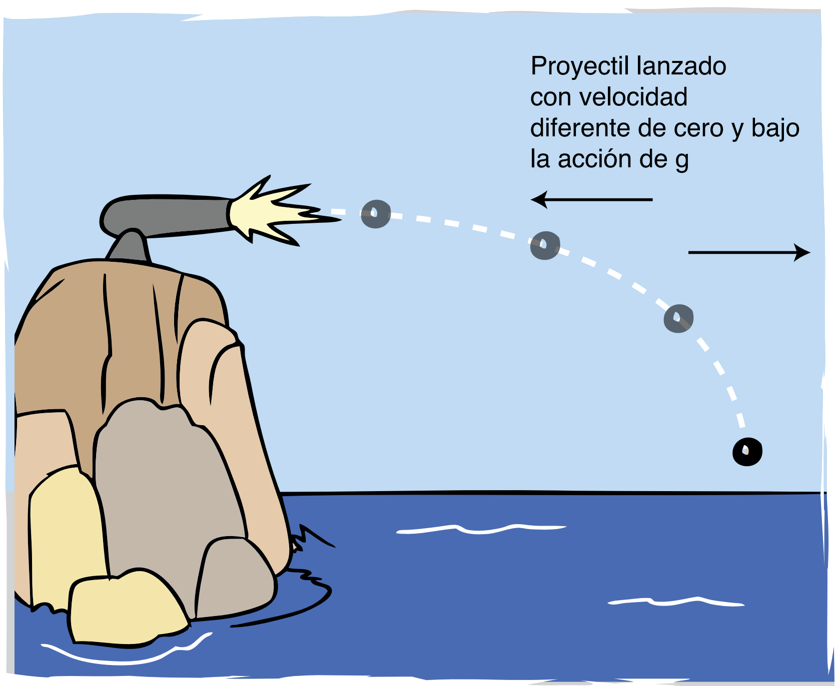
Tema 2. Funciones y ecuaciones Cuadráticas



Indagación

Analicemos la situación siguiente:

La trayectoria de un proyectil, ¿Es una ecuación de segundo grado?



La descripción de la trayectoria de un proyectil desde su salida hasta el punto en donde toca al suelo, fue uno de los grandes problemas de la ingeniería militar medieval.

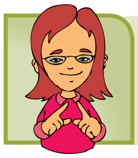
En la edad Media se creía que los proyectiles ascendían oblicuamente hasta que se gastaba su provisión de ímpetus, una especie de fuerza que le imprimía la pólvora a la bala. Agotado el ímpetu, el proyectil caía perpendicularmente al suelo.

Esta teoría del movimiento entraba en descuerdo con la observación: los proyectiles parecían describir una curva y no una línea quebrada.

La moderna teoría del movimiento, que aparece con Galileo, debe muchos de sus logros al problema del movimiento del proyectil.

Desde el siglo XVII se sabe que la trayectoria de un proyectil es una curva de segundo grado.

A partir de entonces, muchos de los problemas relacionados con estas trayectorias se resuelven usando Ecuaciones Cuadráticas.



Conceptualización

Existen problemas que se modelan con una ecuación lineal o con un sistema de ecuaciones lineales o con una ecuación cuadrática, llamada también ecuación de segundo grado.

Ejemplo: Se sabe que el cuadrado de un número es igual al doble de dicho número.

¿Cómo expresas el cuadrado de un número cualquiera?

¿Cómo expresas el doble de dicho número?

Si llamamos x al número, entonces llamaremos x^2 al cuadrado de x .

Si llamamos x al número, entonces llamaremos $2x$ al doble de x.

Como en nuestro ejemplo estos dos valores son iguales, entonces, la expresión matemática que representa esta situación será $x^2 = 2x$

Igualando a cero, es decir, restando $2x$ a ambos lados de la igualdad tenemos: $x^2 - 2x = 2x - 2x$

Por tanto resulta: $x^2 - 2x = 0$

Esta expresión es una ecuación de segundo grado, ya que el exponente mayor de x es 2.

La forma general de la ecuación completa de segundo grado es $ax^2 + bx + c = 0$

en donde x es la incógnita, a, b, c son las constantes, ax^2 es el término cuadrático, bx es el término lineal y c es el término independiente.

Ejemplos de ecuaciones de segundo grado son:

1. $x^2 + 3x - 15 = 0$

2. $4x^2 - 7 = 0$

3. $3x^2 + 4x = 0$

4. $x^2 + 5x = 18$ ***equivale a*** $x^2 + 5x - 18 = 0$

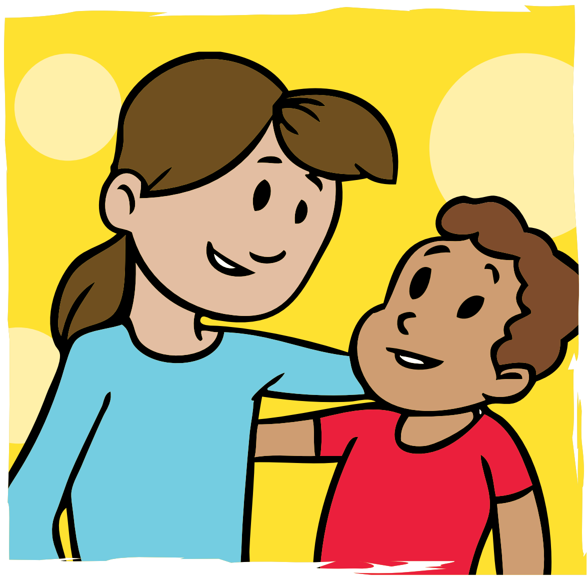
5. $3x^2 = -19$

Una ecuación que tiene todos sus términos se llama completa y si le falta alguno se llama incompleta. Así, en los ejemplos anteriores, las ecuaciones: 1 y 4 son completas y las ecuaciones 2, 3 y 5 son incompletas.

Solución de ecuaciones cuadráticas completas

Analicemos la situación siguiente:

Andrea es 4 años mayor que Juan. Si el producto de sus edades es 45,



¿cuál es la edad de Juan?

Solución:

Supongamos que x es la edad de Juan.

Como Andrea es 4 años mayor, entonces su edad podemos representarla con la expresión $x+4$.

Además, el problema plantea que el producto de las edades de Andrea y Juan es igual a 45, por tanto escribimos: $x(x+4)=45$

Lo que equivale a: $x(x)+x(4)=45$

$x2+4x=45$

Veamos cómo la factorización es una buena estrategia para encontrar las raíces de una ecuación de segundo grado.

Igualamos a cero: $x2+4x-45=0$

Factorizamos la expresión de la izquierda, $(x+\quad)(x-\quad)$ buscando dos números que multiplicados den 45 y que restados den 4.

Entonces nos queda: $(x+9)(x-5)=0$

Para que el producto de los dos paréntesis sea 0, uno de los factores debe ser 0, o los dos.

Si $(x+9)=0$, ya tienes una solución: $x=-9$

Si $(x-5)=0$, entonces, $x=5$

Como x representa la edad de Juan, y esta debe ser un número positivo, entonces descartamos el valor de $x=-9$ y aceptamos el valor de $x=5$.

Por tanto, concluimos que la edad de Juan es 5 años y la edad de Andrea es $x+4=9$, es decir 9 años.

Solución general de la ecuación cuadrática

Una ecuación cuadrática puede resolverse por diferentes métodos de acuerdo con sus características.

Es interesante llegar a una expresión que permita resolver cualquier tipo de estas ecuaciones.

Recuerda que la expresión general de la ecuación cuadrática es: $ax^2+bx+c=0$

En donde: x es la incógnita, a es el coeficiente del término cuadrático, b es coeficiente del término lineal y c es el término independiente.

Las ecuaciones cuadráticas pueden resolverse por los métodos de: factorización, despeje y por fórmula general.

Dada la ecuación general $ax^2+bx+c=0$ podemos solucionarla con la fórmula

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Esta expresión para x, nos posibilita encontrar las dos soluciones o raíces de la ecuación.

Una solución es: $x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

y la otra solución es $x=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Aplicar la fórmula general es reemplazar a, por los valores que tiene la ecuación.

Ejemplo: Resolver la ecuación $x^2-2x+1=0$

Solución:

Comparando la ecuación dada con la ecuación general tenemos:

$$\begin{array}{c} ax^2+bx+c=0 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 1x^2-2x+1=0 \end{array}$$

Es decir que $a=1$ $\qquad b=-2$ $\qquad \mathrm{c}=1$

Reemplazando esos valores en la fórmula general $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Tenemos: $x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(1)}}{2(1)}=\dfrac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{0}}{2}=\dfrac{2\pm0}{2}$

Significa que $x = \frac{2+0}{2} = \frac{2}{2} = 1$ o $x = \frac{2-0}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

En este caso $x = 1$

Solución de ecuaciones cuadráticas incompletas:

Las soluciones o raíces de una ecuación son los valores de las incógnitas que la satisfacen.

Las ecuaciones de primer grado con una incógnita admiten una sola solución o raíz.

Las ecuaciones de segundo grado tienen siempre dos soluciones o raíces, porque existen dos valores de la incógnita que satisfacen a la ecuación.

Volvamos al ejemplo del problema inicial, que dice que el cuadrado de un número es igual al doble de dicho número.

Observa el procedimiento a seguir para resolverlo.

Tenemos que la ecuación es $x^2 - 2x = 0$

Para saber cuál es el valor de x factorizamos sacando el factor común y queda:

$$x(x-2) = 0$$

Tenemos dos factores cuyo producto da cero, significa que cada uno de ellos es igual a cero

Entonces $x = 0$ o $x - 2 = 0$.

Una solución es $x = 0$ y la otra solución es:

$$x - 2 = 0$$

$$x = 0 + 2$$

$$x = 2$$

Comprueba que el número que elevado al cuadrado es igual al doble de él puede ser 0 o también 2, es decir, hay dos valores que satisfacen la ecuación.

Representación gráfica de la función cuadrática

Las ecuaciones cuadráticas llamadas también de segundo grado, tienen representación en el plano cartesiano.

A la ecuación cuadrática $-3x^2 + 6x = 0$, le correspondiente la función cuadrática $y = -3x^2 + 6x$

En la ecuación cuadrática hay dos valores que cumplen la igualdad mientras que en la función pueden irse dando muchísimos valores a x y resultarán los correspondientes valores para y que cumplen la igualdad.

Para graficar en el plano cartesiano la función, $y = -3x^2 + 6x$ damos valores que queramos a x, llamada variable independiente y calculamos los valores que le van correspondiendo a y, llamada variable dependiente. Así:

Si x = 0, entonces, $y = -3(0)^2 + 6(0)$ = 0 + 0 = 0

Si x = 1, entonces, $y = -3(1)^2 + 6(1)$ = -3 + 6 = 3

Si $x=-\frac{1}{2}$, entonces, $y=-3\left(-\frac{1}{2}\right)^2+6\left(-\frac{1}{2}\right)=-3\left(\frac{1}{4}\right)+6\left(-\frac{1}{2}\right)$

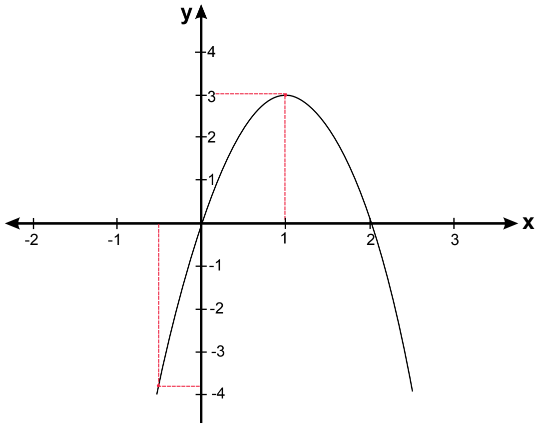
$$y=-\frac{3}{4}-3=-3\frac{3}{4}$$

Si $x=2$, entonces, $y=-3(2)^2+6(2)=-3(4)+6(2)=-12+12=0$

Podemos resumir los cálculos anteriores en una tabla así:

x	y	Puntos del plano
0	0	(0,0)
1	3	(1,3)
$-\frac{1}{2}$	$-3\frac{3}{4}$	$\left(-\frac{1}{2},-3\frac{3}{4}\right)$
2	0	(2,0)

Localizamos esos puntos en el plano cartesiano y obtenemos la curva siguiente.



La función $y=-3x^2+6x$, graficada en el plano cartesiano, es una parábola y como el coeficiente del término cuadrático es negativo, entonces sus ramas se abren hacia abajo.

La parábola corta al eje de las abscisas o eje de las x en los valores 0 y 2

Entonces tenemos los valores de x: $y=-3x^2+6x$

¿Qué le ocurre a la función $y=-3x^2+6x$, en estos puntos?

Si $x=0$, entonces, $y=-3(0)^2+6(0)=0$

Si $x = 2$, entonces,

$$y = -3(2)^2 + 6(2) = -3(4) + 6(2) = -12 + 12 = 0$$

En estos puntos se cumple que: $-3x^2 + 6x = 0$.

Es decir que cuando la función toma el valor 0, se tiene la ecuación que permite hallar los ceros de la función. Despejando la variable x, encuentras las raíces o soluciones, esto es:

$$-3x^2 + 6x = 0$$

$$3x(-x + 2) = 0$$

$3x = 0$ por lo tanto $x = 0$

$-x + 2 = 0$ por lo tanto $x = 2$

Aplicación

1. Dadas las ecuaciones siguientes, completa la tabla identificando sus términos.

Ecuación	Coeficiente del término cuadrático (a)	Coeficiente del término lineal (b)	Término independiente
$3x^2 - 15x = 0$			
$x^2 - 7x + 9 = 0$			
$x^2 + 6x - 8 = 0$			
$-x^2 + 2x = 0$			

2. Escribe la función correspondiente a cada ecuación

Ecuación	Función
$3x^2 - 15x = 0$	
$x^2 - 7x + 9 = 0$	
$x^2 + 6x - 8 = 0$	
$-x^2 + 2x = 0$	

3. La base de un triángulo mide 6 cm más que la altura y el área es de 20 cm^2. Calcular la base y la altura.

4. El área de un terreno rectangular es 360 m^2, y el largo excede al ancho en dos metros. ¿Cuántos metros lineales se necesitan para cercar el terreno?

5. Determina un número entero tal que el cuadrado del antecesor de su doble sea equivalente al cuadrado del número aumentado en 5.

Grafica las funciones:

6. $y = x^2$

7. $y = x^2 = x + 1$

8. $y = x^2 - 2x - 3$

9. $y = x^2 + 2x + 3$

10. $y = x^2 - 2x - 8$

Entendemos por…

Término cada uno de los sumandos que aparecen en una expresión algebraica.
Coeficiente la constante que multiplica la parte literal de un término algebraico.
Incógnita cada una de las letras distintas que aparecen en una ecuación

Diversión matemática

Diviértete resolviendo este acertijo:
Una ardilla se encuentra en la entrada de su madriguera, en un árbolde 16 m. de altura. Si desde la copa del árbol hasta la madriguera hay tres veces la distancia que de la madriguera al suelo,
a qué altura se encuentra la ardilla?

Día a día

Las ecuaciones cuadráticas se aplican en fórmulas físicas relacionadas con el movimiento, por ejemplo, un proyectil disparado verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial de 120 pies por segundo y teniendo en cuenta que la única fuerza sobre el proyectil es la gravedad, se tiene que la altura "h" en pies del proyectil sobre el suelo después de "t" segundos está dada por:
$h = -16t^2 + 120t$

(Tomado de Hipertexto 9 Santillana).

Este capítulo fue clave porque

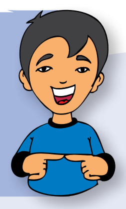
Comprendí la importancia que tienen las funciones en la vida cotidiana, en el desempeño de los trabajos y en la vida escolar.

He podido reflexionar sobre la importancia de interpretar gráficas de función lineal, existentes en nuestro entorno, y que son conocimientos muy importantes en el diario vivir. Saber que existen situaciones que relacionan por ejemplo la cantidad de animales con el consumo de alimento, el crecimiento de las plantas con el abono que se aplica.

Identifiqué la relación de las funciones con otras ciencias como: Biología, por ejemplo al relacionar la estatura y edad de los adolescentes; Física, al relacionar la velocidad del sonido con temperatura.etc.

He aprendido cómo solucionar ecuaciones tanto lineales como cuadráticas y aplicalo en la solución de problemas.

Conectémonos con Economía

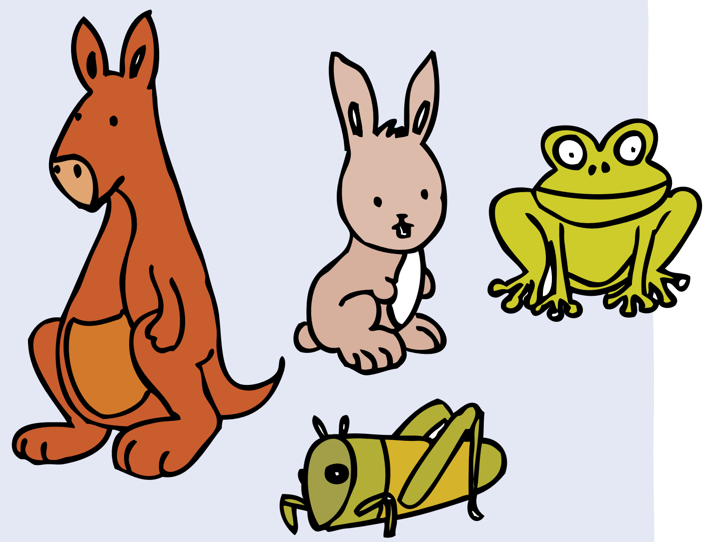


En la naturaleza existen muchos animales que tienen la capacidad de hacer saltos de gran altura, en proporción a su tamaño.

Por ejemplo, el antílope de África meridional puede saltar 15 veces su propia altura, el canguro rojo, que mide 2 metros, saltar hasta los 3 metros de alto, la pulga común puede saltar hasta una altura de 130 veces su tamaño corporal.

Este tipo de saltos se pueden mostrar usando gráficas que suponen una parábola, y se hace su análisis a partir de las características de ese tipo de gráficas.

Una pulga salta una distancia de hasta 200 veces la longitud de su cuerpo se debe a una estructura como un resorte en su cuerpo. Imágenes captadas a alta velocidad ahora revelan que el secreto radica en la forma en que las pulgas usan sus patas traseras como palancas articuladas. Este "efecto palanca" les permite a las pulgas llevar sus patas al suelo y liberar repentinamente energía como un resorte hacia delante y hacia arriba, afirman los científicos en la revista Journal of Experimental Biology (Revista de Biología Experimental).



Sutton agregó: "Esto nos muestra cuán poco sabemos acerca de la capacidad de insectos muy comunes".

Y me imagino que todos concordamos con el doctor Sutton, que no conocemos ni siquiera una miniscula parte del mundo que nos rodea. Es impresionante el diseño que se ve hasta en estos minúsculos animalitos.

http://www.planetacurioso.com/2011/02/11/por-que-las-pulgas-saltan-tan-alto-y-tan-rapido/