GUÍA	**GUÍA No. 3**	
ASIGNATURA	**TRIGONOMETRÍA**	
GRADO	**DÉCIMO**	
PERIODO ACADÉMICO	**TERCERO**	
DOCENTE	RICARDO MORA J.M (1001 JM) DANIEL VALDERRAMA (1002 J.M.) MARLEN CAMACHO J.T.	fmoram@educacionbogota.edu.co davalderrama@educacionbogota.edu.co marlen.ofircita2000@gmail.com
DESEMPEÑO DEL PERIODO	Comprende y utiliza funciones para modelar fenómenos periódicos y justifica las soluciones.	
INDICACIONES GENERALES:	**ACTIVIDADES:** • Si tiene conectividad, realice las actividades en su cuaderno tome fotos y envíelas al lugar al que le indique su docente en los encuentros virtuales • Si no tiene conectividad, realice la actividad en hojas, de forma muy ordena y clara, márquelas adecuadamente y entréguelas en la fecha y lugar indicados por coordinación	**ACTIVIDAD 1. TEOREMA DEL SENO Y DEL COSENO (JULIO 16)** **ACTIVIDAD 2. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS (JULIO 30)** **ACTIVIDAD 3 MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL (AGOSTO 6)**
EVALUACIÓN Y VALORACIÓN:	La evaluación se enmarca desde el SIE de la Institución en los componentes: Actitudinal (asistencia a encuentros y autoevaluación) Procedimental (evaluación de aplicaciones de la guía y heteroevaluación) Cognitivo (prueba)	

SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

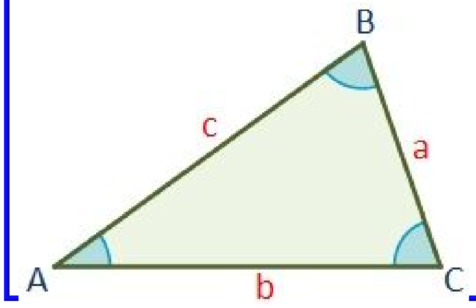
Un **triángulo oblicuángulo** es aquel que no es recto ninguno de sus ángulos, por lo que no se puede resolver directamente por el teorema de Pitágoras,

Este tipo de triángulos se resuelven por medio de los teoremas del seno y del coseno, como veremos a continuación. Recuerda en especial que la suma de todos los ángulos internos de un triángulo suma 180 grados.

TEOREMA DEL SENO

El **teorema del seno** (o **teorema de los senos**) relaciona proporcionalmente los lados y los ángulos de un **triángulo** cualquiera. Éste enuncia que:

Cada **lado** de un triángulo (*a*, *b* y *c*) es directamente **proporcional** al **seno** del **ángulo opuesto** (*A*, *B* y *C*).

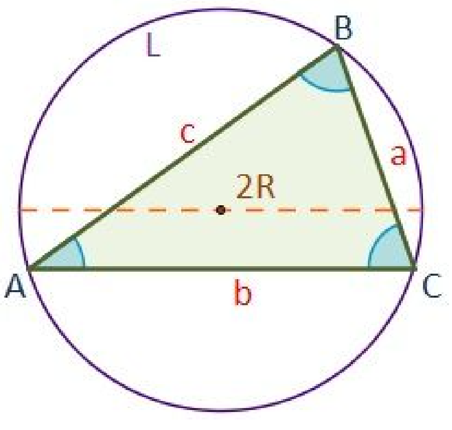


$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

siendo a, b y c los costados y A, B y C los ángulos del triángulo

La razón entre un lado y el seno del ángulo opuesto es igual al diámetro (el doble del radio, *2R*) de la circunferencia (*L*) en la que se circunscribe el triángulo.

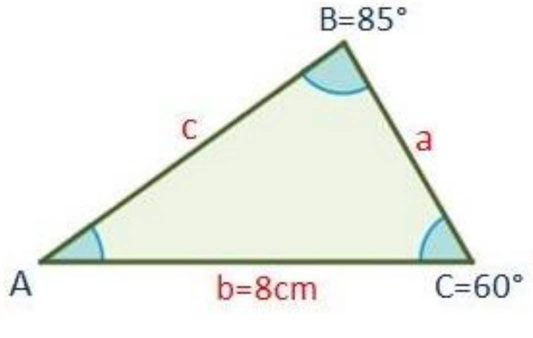
Es decir, todas las **razones** entre cada **lado** (*a*, *b* y *c*) y el seno del **ángulo opuesto** (*A*, *B* y *C*) son **directamente proporcionales** y dicha proporción es **2*R***.



$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R$$

El teorema del seno se puede aplicar siempre y cuando se cumplan algunos requisitos en el triángulo que se desea resolver. A continuación, observaremos cada uno de esos casos en los cuales, es posible aplicar el teorema del seno.

CASO 1. Se conocen dos ángulos y un lado (distinto a los lados opuestos de los ángulos dados).



Sea un **triángulo** con un lado conocido (*b*=8 cm) y dos ángulos conocidos (*B*=85° y *C*=60°).

Calcularemos los lados (*a* y *c*) y ángulos (*A*) desconocidos gracias al **teorema del seno**.

1. Los ángulos suman 180°, por lo que **A+B+C=180°**. Sabiendo *B* y *C* obtenemos *A*.

$$A+B+C = 180^o \rightarrow$$
$$\rightarrow A = 180^o - B - C = 180^o - 85^o - 60^o = 35^o$$

Se obtiene que **A=35°**.

2. Por la fórmula del **teorema del seno** tenemos que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 35^o} = \frac{8}{\operatorname{sen} 85^o} = \frac{c}{\operatorname{sen} 60^o}$$

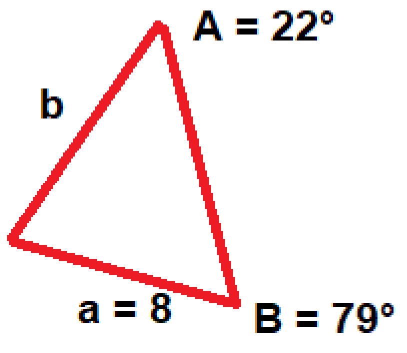
Despejando podemos obtener los dos lados restantes (*a* y *c*).

$$a = \frac{8 \cdot \operatorname{sen} 35^o}{\operatorname{sen} 85^o} = \frac{8 \cdot 0,57}{0,996} = 4,6\ cm$$

$$c = \frac{8 \cdot \operatorname{sen} 60^o}{\operatorname{sen} 85^o} = \frac{8 \cdot 0,87}{0,996} = 7\ cm$$

Por lo que el lado ***a*=4,6 cm** y ***c*=7 cm**.

Caso 2. Se conocen dos ángulos y un lado (correspondiente a uno de los lados opuestos de los ángulos dados).



Cuando tengamos que resolver un triángulo no rectángulo del cual conozcamos una pareja ángulo-lado opuesto y un dato de algún otro lado o ángulo, aplicaremos el teorema del seno. Recuerda que es el que establece la siguiente relación:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{Sen\ A}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{Sen\ B}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{Sen\ C}}$$

Siendo **a** y **A**, **b** y **B**, **c** y **C** las parejas de ángulo y lado opuesto. Utilizamos en este caso los 22º y el lado de 8 como referencia y calculamos el lado opuesto a los 79º:

De esta manera:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{Sen\ A}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{Sen\ B}}$$

$$\frac{8}{sen\ 22°} = \frac{b}{sen\ 79°}$$

$$\frac{8\ sen\ 79°}{sen\ 22°} = b$$

$$20{,}96° = b$$

Para hallar el resto podría parecer que nos falta el dato del tercer ángulo. Pero recuerda que los tres ángulos de un triángulo siempre suman 180º. Por lo tanto, ese tercer ángulo debe valer

$$C = 180° - 79° - 20{,}96°$$

$$C = 80{,}04°$$

Para calcular el lado, nuevamente utilizamos el teorema del seno. En este caso, como conocemos los lados a y b y sus ángulos correspondientes A y C, podemos usar cualquier proporción que involucre a C y al ángulo C. Por ejemplo,

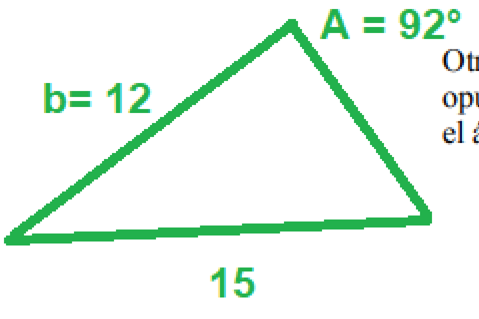
$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{Sen\ A}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{Sen\ C}}$$

$$\frac{8}{sen\ 22°} = \frac{c}{sen\ 80{,}04°}$$

$$\frac{8\ sen\ 80{,}04°}{sen\ 22°} = c$$

$$21{,}03 = c$$

Caso 3. Se conocen dos lados y un ángulo (no comprendido entre los dos lados dados)



Otro caso de teorema del seno, pues tenemos una pareja ángulo/lado opuesto completa, y algún otro dato suelto. Empezamos calculando el ángulo que está frente al lado que mide 12:

$$\frac{a}{Sen\ A} = \frac{b}{Sen\ B}$$

$$\frac{15}{sen\ 92°} = \frac{12}{sen\ B}$$

Luego, $sen\ B = \frac{12\ sen\ 92°}{15}$

$$\boldsymbol{sen\ B = 0,8}$$

$$\boldsymbol{B = sen^{-1}(0,8) = 53,13°}$$

Para hallar el resto podría parecer que nos falta el dato del tercer ángulo. Pero recuerda que los tres ángulos de un triángulo siempre suman 180º. Por lo tanto, ese tercer ángulo debe valer

$$C = 180° - 92° - 53.13°$$

$$C = 34{,}87°$$

Para calcular el lado, nuevamente utilizamos el teorema del seno. En este caso, como conocemos los lados a y b y sus ángulos correspondientes A y C, podemos usar cualquier proporción que involucre a C y al ángulo C. Por ejemplo,

$$\boldsymbol{\frac{a}{Sen\ A} = \frac{c}{Sen\ C}}$$

$$\frac{15}{sen\ 92°} = \frac{c}{sen\ 34{,}87°}$$

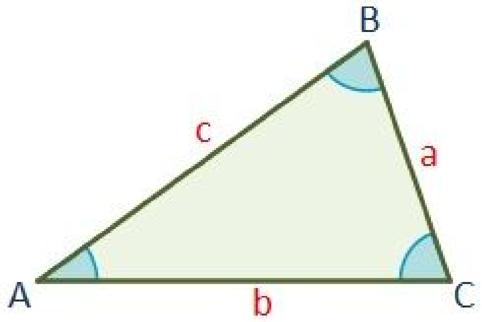
$$\frac{15\ sen\ 34{,}87°}{sen\ 92°} = c$$

$$8{,}58 = c$$

TEOREMA DEL COSENO

El **teorema del coseno** relaciona un lado del **triángulo** con los otros dos y el ángulo que forman éstos. El teorema enuncia que:

El cuadrado de un **lado** (*a*, *b* o *c*) cualquiera de un triángulo es **igual** a la suma de los cuadrados de los dos **lados restantes** menos el doble del producto de ellos por el **coseno** del ángulo (*A*, *B* o *C*) que forman.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

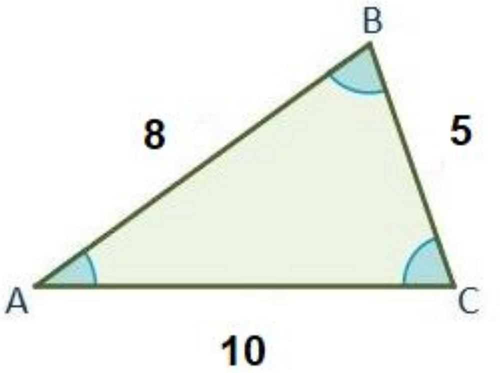
siendo a, b y c los costados y A, B y C los ángulos del triángulo

El **teorema del coseno** es una generalización del **teorema de Pitágoras** para cualquier **triángulo**.

De hecho, si el ángulo *A* fuese recto (90°), su coseno seria cero, quedando: $a^2 = b^2+c^2$. Si el ángulo *A* fuese obtuso, es decir >90º, entonces el coseno sería negativo.

El teorema del coseno se puede aplicar siempre y cuando se cumplan algunos requisitos en el triángulo que se desea resolver. A continuación, observaremos cada uno de esos casos en los cuales, es posible aplicar el teorema del seno.

CASO 1. Se conocen los tres lados de un triángulo, pero ninguno de sus ángulos



Iniciaremos calculando el ángulo A. En este caso, tenemos que utilizar la expresión

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

Luego, $5^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \times 10 \times 8 \times cosA$

De esta manera, se tiene que

$$25 = 100 + 64 - 160\cos A$$

$$25 - 100 - 64 = -160\cos A$$

$$-139 = -160\cos A$$

$$\frac{-139}{-160} = cos\ A$$

$$0{,}86875 = \cos A$$

Por tanto, $cos^{-1}(0{,}86875) = A$

$$29{,}69° = A$$

Para calcular otro de los ángulos, bien sea el ángulo B o el C, procedemos de manera similar. Por ejemplo, calculemos el ángulo B. En este caso, se cumple que:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

así, $10^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \times cosB$

De esta manera, se tiene que

$$100 = 25 + 64 - 80\ \cos B$$

$$100 - 25 - 64 = -80\ \cos B$$

$$11 = -160\text{co}B$$

$$\frac{11}{-160} = cos\ B$$

$$0{,}06875 = \cos\text{B}$$

Por tanto, $cos^{-1}(0{,}06875) = B$

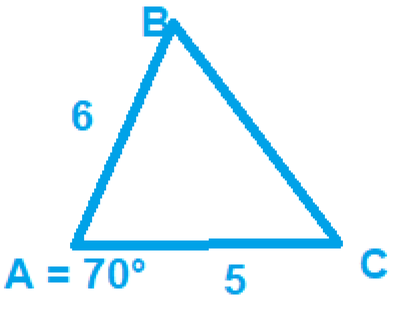
$$86{,}06° = A$$

Para hallar el tercer ángulo, utilizamos la expresión

$$C = 180° - 29{,}69° - 86{,}06°$$

$$C = 64{,}25°$$

Caso 2. Se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos



Ahora no nos vale el teorema del seno, porque no tenemos una pareja de ángulo/lado opuesto. Para estos casos, en los que conocemos dos lados y el ángulo del vértice que forman, usamos el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

Luego,

$$a^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \times 5 \times 6 \times \cos 70°$$

$$a^2 = 25 + 36 - 60 \times \cos 70°$$

$$a^2 = 25 + 36 - 60 \times 0{,}34$$

$$a^2 = 40{,}6$$

$$a = \sqrt{40{,}6}$$

$$a = 6{,}37$$

Conociendo el lado opuesto, ya podemos usar el teorema del seno para hallar alguno de los ángulos que aún no tenemos:

$$\frac{a}{Sen\ A} = \frac{b}{Sen\ B}$$

$$\frac{6{,}37}{Sen\ 70°} = \frac{5}{Sen\ B}$$

$$\frac{6{,}37\ sen\ B}{sen\ 70°} = 5$$

$$sen\ B = \frac{5\ sen\ 70°}{6{,}37}$$

$$sen\ B = 0{,}74$$

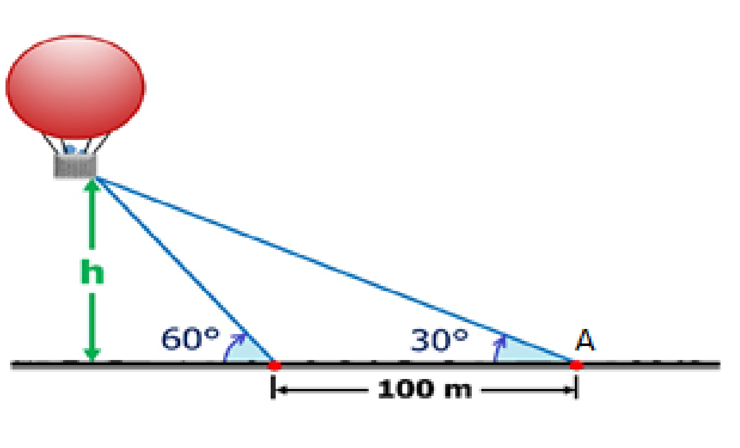
Finalmente,

$$B = sen^{-1} 0{,}74 = 47{,}73°$$

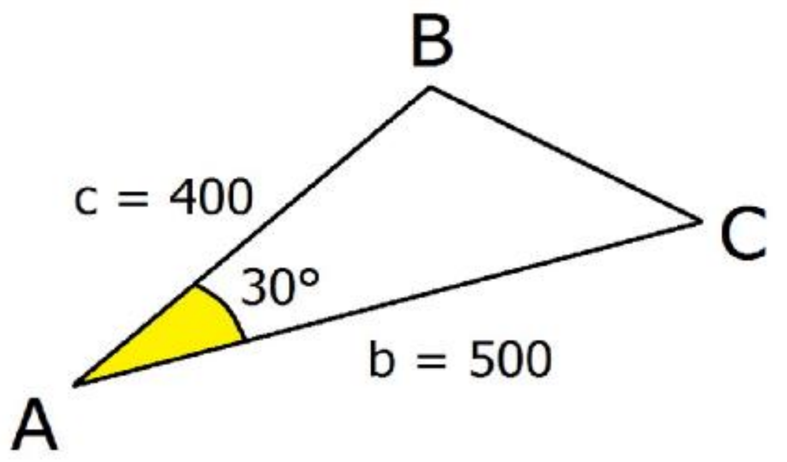
Por último, $C = 180° - 70° - 47{,}73° = 62{,}27°$

ACTIVIDAD 1

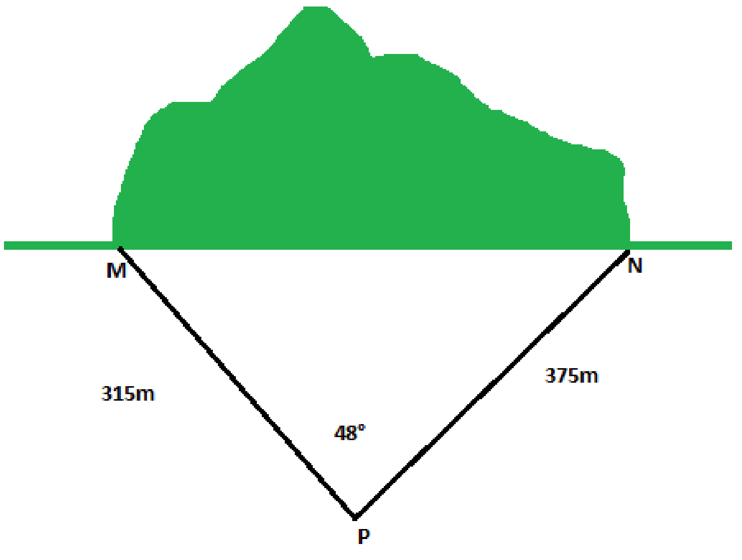
1. Un globo se encuentra a una distancia h del piso como muestra la figura.



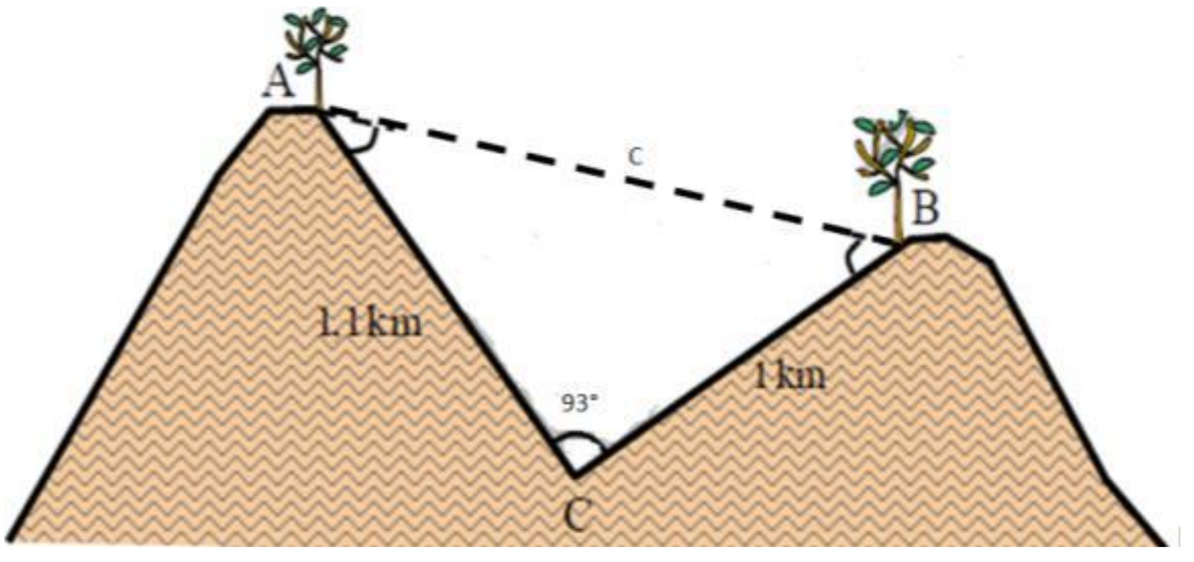
a. Calcule la altura del globo respecto al suelo
b. Determine la distancia del globo al punto A
2. En la siguiente figura, determine la medida del lado a en el triángulo ABC, es



3. A lado y lado de una montaña se ubican los puntos M y N, como se muestra en la figura. Un observador se ubica en un punto P tal que su distancia respecto a M y N es 315 y 375 metros respectivamente. El ángulo determinado por los puntos M, P y N es 48°.

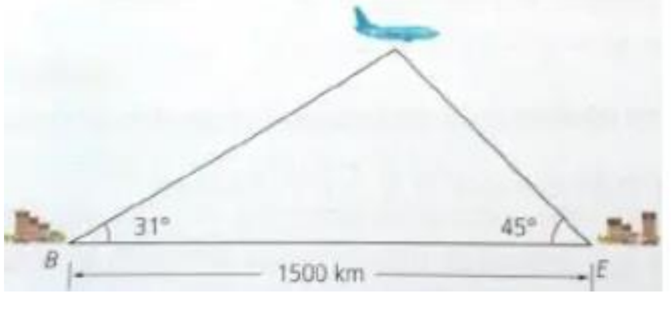


a. Calcule la distancia entre M y N
b. Determine la amplitud del ángulo NMP.
c. Halle la amplitud del ángulo MNP.
4. Observe la siguiente figura.

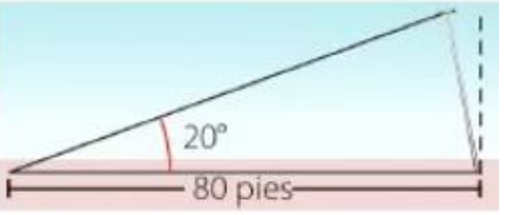


a. Calcule la distancia del árbol A al árbol B.
b. Halle la medida del ángulo determinado por el Árbol A, el árbol B y el punto de depresión C.
c. Determine la medida del ángulo BAC.}

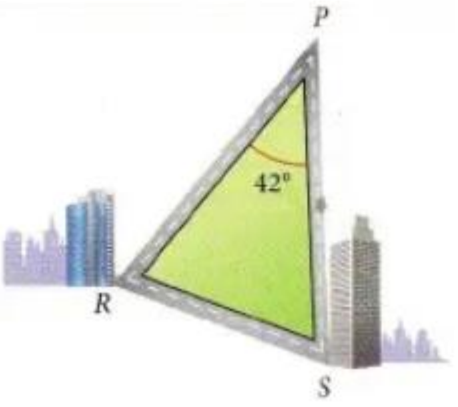
5. Un avión viaja entre 2 ciudades B y E con ángulos de elevación de 31° y 45°, respectivamente. La distancia entre las ciudades es de 1500 km. ¿A qué distancia se encuentra el avión de cada ciudad? ¿A qué altura está volando en ese momento?



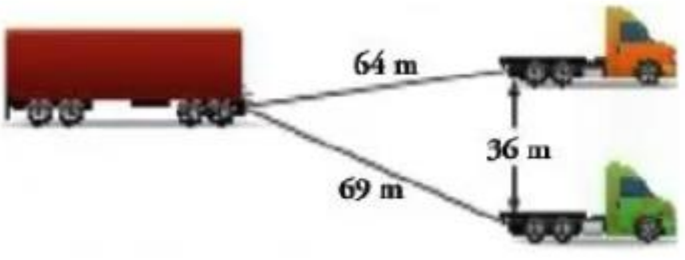
6. Un poste está inclinado 11° con respecto a la vertical del Sol. El poste emite una sombra de 80 pies de largo sobre el piso cuando el ángulo de elevación del Sol es de 20°. ¿Cuáles la longitud del poste?



7. Dos carreteras rectas se cruzan en un punto P formando un ángulo de 42°. En un punto R de una de las carreteras hay un edificio que está a 368 m de P, y en un punto S de la otra carretera, hay un edificio que está a 426 m de P. Determínala distancia entre R y S



8. Dos remolques que están separados por 36 metros tiran de un contenedor, como se muestra en la figura. Si la longitud de uno de los cables es 64 m y la del otro es de 69 m, determina el ángulo que forman entre ellos



IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Identidad Trigonométrica es una igualdad algebraica entre razones de un mismo ángulo, que se cumple para cualquier valor asignado al ángulo.

Para las funciones trigonométricas existen ocho identidades fundamentales, que pueden ordenarse en tres grupos:

- *Recíprocas,*
- *De División* y
- *De Cuadrados o pitagóricas.*

IDENTIDADES RECÍPROCAS:		
(sen A)(csc A) = 1	(cos A)(sec A) = 1	(tan A)(cot A) = 1
Se pueden también expresar como:		
$senA = \frac{1}{\csc A}$ $\csc A = \frac{1}{senA}$	$\cos A = \frac{1}{\sec A}$ $\sec A = \frac{1}{\cos A}$	$\tan A = \frac{1}{\cot A}$ $\cot A = \frac{1}{\tan A}$

IDENTIDADES DE DIVISIÓN o FORMA DE COCIENTE:	
$\tan A = \frac{senA}{\cos A}$	$\cot A = \frac{\cos A}{senA}$

IDENTIDADES DE CUADRADOS o PITAGÓRICAS		
$sen^2A + \cos^2A = 1$ $senA = \sqrt{1-\cos^2 A}$ $\cos A = \sqrt{1-sen^2 A}$	$\sec^2A = 1 + \tan^2A$ $\sec A = \sqrt{1+\tan^2 A}$ $\tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$	$\csc^2A = 1 + \cot^2A$ $\csc A = \sqrt{1+\cot^2 A}$ $\cot A = \sqrt{\csc^2 A - 1}$

De estos grupos principales se pueden obtener otras identidades trigonométricas.

IDENTIDADES PARA EL DOBLE DE UN ÁNGULO	
$sen2A = 2senA\cos A$	$\cos 2A = \cos^2 A - sen^2 A$
$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$	$\cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2\cot A}$

IDENTIDADES PARA LA MITAD DE UN ÁNGULO		
$sen\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$	$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$	$\tan\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{senA}$

DEMOSTRACIÓN DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

La demostración de estas identidades se efectúa aplicando las definiciones de las funciones trigonométricas de los números reales.
No existe un método fijo para llevar a cabo las demostraciones, lo que se recomienda es: empezar con el miembro izquierdo (o derecho) que sea más complicado, después sustituir las funciones en términos de Senos y Cosenos, y posteriormente simplificar.

Demostrar que $\cot A = \frac{\cos A}{senA}$	
$\cot A = \frac{1}{\tan A}$ y $\tan A = \frac{senA}{\cos A}$	Utilizando las identidades trigonométricas.
$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{senA}{\cos A}}$	Sustituyendo las identidades trigonométricas en el miembro izquierdo y aplicando extremos por extremos y medios por medios.
$\cot A = \frac{\cos A}{senA}$	Por lo tanto, queda demostrada.

Demostrar que Cos A Sec A = 1	
$\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$	Utilizando la identidad trigonométrica.
$\cos A\left(\dfrac{1}{CosA}\right) = 1$ $\dfrac{\cos A}{\cos A} = 1$ $1 = 1$	Sustituyendo la identidad trigonométrica en el miembro izquierdo y efectuando la multiplicación.
$\cos A \sec A = 1$	Por lo tanto, queda demostrado.

Demostrar que $\dfrac{sen^2 A + \cos^2 A}{\tan^2 A + 1} = \cos^2 A$	
$sen^2 A + \cos^2 A = 1$ y $\tan^2 A + 1 = \sec^2 A$	Utilizando la identidad trigonométrica.
$\dfrac{1}{\sec^2 A} = \cos^2 A$ como $[\cos A]^2 = \left[\dfrac{1}{\sec A}\right]^2$ $\therefore \cos^2 A = \cos^2 A$	Sustituyendo la identidad trigonométrica en el miembro izquierdo.
$\dfrac{sen^2 A + \cos^2 A}{\tan^2 A + 1} = \cos^2 A$	Por lo tanto, queda demostrado.

ACTIVIDAD 2

Demuestre las siguientes identidades trigonométricas

1) $\dfrac{\tan A}{\sec A} = senA$
2) $\dfrac{\cot A}{\csc A} = \cos A$
3) $\dfrac{\sec A}{\tan A} = \csc A$

4) $\dfrac{\sec A}{\csc A} = \tan A$

5) $\dfrac{\csc A}{\sec A} = \cot A$

6) $\tan A \cos A = senA$

7) $senA \cot A = \cos A$

8) $\csc A \tan A = \sec A$

9) $\csc A(1-\cos^2 A) = senA$

10) $senA(1+\cot^2 A) = \csc A$

11) $(\tan^2 A+1)\cos^2 A = 1$

12) $\sec^2 A(1-sen^2 A) = 1$

13) $\sec A(1-sen^2 A) = \cos A$

En esta sección estudiamos las medidas de tendencia central y de dispersión para datos no agrupados. Los datos no-agrupados son aquéllos sin procesar, esto es, que aún están enlistados en la forma como se fueron haciendo los registros; su contraparte son los datos agrupados en tablas de distribución de frecuencias. Las medidas de tendencia central que abordaremos sobre estos datos sin procesar son la media aritmética, la moda y la mediana; y revisaremos las siguientes medidas de dispersión o de variabilidad: el rango o amplitud, la varianza, la desviación estándar y la desviación media absoluta.

Ejemplo de datos no agrupados. Un ejemplo de datos no-agrupados es el que se presenta enseguida y que corresponde a las calificaciones que 50 jóvenes y señoritas del Tecnológico obtuvieron en una unidad de Probabilidad.

Cuadro 1. Calificaciones obtenidas por 50 alumnos en un examen de Probabilidad

71	52	58	60	66	67	91	70	75	83
88	89	82	93	72	71	61	74	76	61
57	64	62	74	64	77	87	62	85	80
68	76	80	82	31	85	62	97	72	69
57	87	73	72	79	84	81	79	81	73

Como puede observar, las calificaciones en el Cuadro 1, están “revueltas”; aparecen en el orden como fueron registradas en los estudiantes. Puede usted hacer otros ejemplos de datos no agrupados registrando las estaturas, pesos, edades o número de hermanos de sus compañeros del salón.

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Las medidas de tendencia central más frecuentes son la mediana, la moda y la media aritmética; ésta última es la más usada por su practicidad y sus buenas propiedades estadísticas.

LA MEDIANA

La mediana, representada por $\tilde{m}$, es el valor medio de una serie cuando los valores se han ordenado ascendentemente. Para la serie 3, 4, 5, 8 y 9, la mediana es el tercer valor, 5. Si hay seis valores en una serie, por ejemplo 3, 4, 5, 8, 9 y 10, cualquier valor entre 5 y 8 dividiría la serie en dos partes iguales; por tanto, cualquiera de tales valores podría ser la mediana. En la práctica, para un número par de datos, suponemos que la mediana se encontrará entre los dos valores centrales. Por tanto, en nuestro ejemplo, la mediana sería

6.5. La mediana puede tener valores idénticos con el suyo a la izquierda y a la derecha. Por ejemplo, en la serie 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 8, 9, la mediana es 5.

Debido a estas características, puede definirse formalmente la *mediana* como aquel valor que divide una serie de tal forma que por lo menos 50 por 100 de los valores son iguales a él o menores que él, y por lo menos 50 por 100 de los valores son iguales o mayores que él. O bien, la mediana de una colección de datos ordenados en orden de magnitud es el valor medio o media aritmética de los dos valores centrales.

Característica de la mediana. Una característica sobresaliente de la mediana es su insensibilidad hacia las clasificaciones extremas. Considere el siguiente conjunto de calificaciones: 2, 5, 8, 11, 48. La mediana es 8.
Esto es verdad, aunque el conjunto tiene una calificación extrema de 48. Si en lugar de 48 tuviésemos una calificación de 97, la mediana seguiría siendo la misma.

LA MODA

La *moda*, denotada por Mo, es aquel valor de una serie de datos que aparece más frecuentemente que cualquier otro. Este valor puede ser descubierto inmediatamente cuando se ordenan los datos. Por ejemplo, en la serie 1, 2, 4, 4, 5, 6, y 7, la moda es 4. Por consiguiente, podemos considerar la moda como típica en el sentido en el sentido de que es el valor más "probable" de una serie. La moda para una serie de datos no agrupados siempre coincide con un valor real en la serie.

Aunque la moda es un concepto sencillo y útil, su aplicación presenta muchos aspectos engorrosos. Primero, una distribución puede revelar que dos o más valores repiten un número igual de veces, y en tal situación no hay forma lógica de determinar qué valor debe ser escogido como la moda. Hablando en sentido riguroso, cualquier valor se llama moda si aparece más a menudo que cualquiera de los valores adyacentes. Sin embargo, mientras las frecuencias de los valores modales no sean iguales, podríamos decidir escoger el valor con la frecuencia más alta como la moda para la serie.

Segundo, puede que no hallemos ningún valor que aparezca más de una vez.
Tercero, la moda es un valor muy inestable. Puede cambiar radicalmente con el método de redondeo de los datos.

Finalmente, la moda podría ser un valor extremo, como en el caso de una distribución triangular (una distribución en la que la densidad de frecuencias disminuye o aumenta, continuamente y a un ritmo de izquierda a derecha), y entonces difícilmente podría ser considerada como una medida de tendencia central.

Ejemplo 1. Las serie de datos 2, 2, 5, 7, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 12, 18 tiene de moda 9.
Ejemplo 2. La serie 3, 5, 8, 10, 12, 15, 16 no tiene de moda.
Ejemplo 3. La serie 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 7, 7, 9 tiene dos modas, 4 y 7, y se dice que es un conjunto de datos bimodal.

LA MEDIA ARITMÉTICA

La media aritmética, por su facilidad de cálculo, largo uso y propiedades matemáticas convenientes es promedio mejor conocido y de uso más común. A veces, se conoce sencillamente como "la media" o el "promedio", pero deben usarse siempre adjetivos apropiados cuando el contexto incluye varios tipos de medias.

La *media aritmética*, representada por $\bar{x}$, es la suma de los valores individuales de una muestra dividida por el número de observaciones de la muestra:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Propiedades de la media aritmética.

- Primero, es un valor típico porque es el centro de gravedad un punto de equilibrio. También es típica porque su valor puede substituir al valor de cada dato de la serie sin cambiar el total.
- La suma algebraica de las desviaciones con relación a la media es cero. Esto es, $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$.
- La tercera propiedad de la media aritmética es que la suma de las desviaciones elevada al cuadrado de los datos respecto a la media es menor que la suma de las desviaciones elevada al cuadrado de cualquier otro punto.

CUARTILES, DECILES Y PERCENTILES

Si una serie de datos se colocan en orden de magnitud, el valor medio (o la media aritmética de los dos valores medios) que divide el conjunto de datos en dos partes iguales es la mediana. Por extensión, de esta idea se puede pensar en aquellos valores que dividen a los datos en cuatro partes iguales. Estos valores, representados por Q_1, Q_2 y Q_3 se llaman primero, segundo y tercer *cuartil*, respectivamente; el valor de Q_2 es igual al de la mediana.

Análogamente los valores que dividen los datos en diez partes iguales se llaman *deciles* y se representan por $D_1, D_2, ..., D_9$, mientras que los valores que dividen los datos en cien partes iguales se llaman *percentiles* y se representan por $P_1, P_2, ..., p_{99}$ El quinto decil y el quincuagésimo percentil, se corresponden con la mediana. Los percentiles P_{25} y P_{75} se corresponden con el primer y tercer cuartil respectivamente.

MEDIDAS DE VARIABILIDAD

Al caracterizar una población por el estudio de un atributo, no sólo es necesario conocer el valor alrededor del cual tienden a presentarse con más frecuencias los valores de x, sino también el grado de dispersión de estos valores.

Un "promedio" sin salvedades puede carecer virtualmente de significado. Un factor que aumenta la confusión es que con algunas distribuciones todos los promedios importantes están estrechamente reunidos, mientras que con otras están muy separados. En otras palabras, un promedio puede ser muy engañoso, a menos que sea identificado y vaya acompañado de otra información que nos diga la amplitud de cosas o sus desviaciones con relación al promedio.

EL RANGO O AMPLITUD

El rango[1] es la diferencia entre la puntuación mayor y la puntuación menor. Indica el número de unidades necesarias en la escala de medición para incluir los valores máximo y mínimo. Se calcula así: $x_M - x_m$ (puntuación mayor menos puntuación menor). También se le puede llamar "amplitud" o "recorrido".

Ejemplo. Si tenemos los siguientes valores: 17, 18, 20, 20, 24, 28, 28, 30, 33. El rango será: 33 − 17 = 16.

Cuanto más grande sea el rango, se espera mayor dispersión de los datos.

DESVIACIÓN MEDIA ABSOLUTA

La búsqueda de una medida de variabilidad que tome en cuenta todos los valores observados y que caracterizaría la dispersión de los valores individuales partiendo de la tendencia central nos conduce a la idea de calcular una medida como:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})$$

pero esta medida será siempre igual a cero, porque

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{x} = n\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - n\bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0$$

y, por tanto, difícilmente puede ser considerada como una medida de algo.

Una forma obvia de superar la dificultad es hallar una media de las desviaciones ignorando la dirección y el signo algebraico correspondiente. Al hacerlo así, obtendríamos lo que se llama la *desviación media absoluta*, o simplemente la desviación media, de la muestra. La desviación media absoluta, *dm*, de una serie de datos está dada por:

$$dm = \sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|$$

La desviación media es útil para tratar situaciones en las que no se requiere un análisis minucioso.

LA VARIANZA Y LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR

El promedio de las desviaciones al cuadrado de la media se llama *varianza* muestral, designada por s^2. Simbólicamente,

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

donde $n - 1$ se llama "n − 1 grados de libertad".

El valor de la varianza, desde el punto de vista práctico, es un poco complicado de entender, porque las unidades asignadas a ella son cuadradas, tales como *metros*^{2}, *kg*^{2}, *personas*^{2}, etc. Para convertir esta medida de variabilidad en unidades originales, podemos tomar la raíz cuadrada (positiva) de s^2, obteniendo la *desviación estándar* de una muestra. La desviación estándar sirve como medida básica de variabilidad.

La desviación estándar, denotada por *s*, está dado por:

$$s = \sqrt{\text{var}\,ianza} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Fórmula de operación de la varianza. Falta agregar demostración algebraica.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

La fórmula de operación de la varianza puede escribirse también como (sólo multiplicamos la fórmula anterior por n tanto en el numerador como en el denominador):

$$s^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n(n-1)}$$

ACTIVIDAD 3

Calcule las medidas de tendencia central que se piden en los siguientes ejercicios.

1. Calcule la mediana, la moda y la media aritmética de las calificaciones del Cuadro 1.

2. Un artículo publicado en 1988 en una revista especializada describe el cálculo de los coeficientes de arrastre para la superficie aerodinámica NASA 0012. Para ello se utilizaron diferentes algoritmos computacionales con $M_{\infty} = 0.7$, obteniéndose los siguientes resultados (los coeficientes de arrastre están dados en unidades de conteos de arrastre; esto es equivalente a un coeficiente de arrastre de 0.0001): 79, 100, 74, 83, 81, 85, 82, 80 y 84. Calcule

   a). La media muestral

   b). La mediana muestral

3. Las siguientes mediciones corresponden a las temperaturas de un horno registradas en lotes sucesivos de un proceso de fabricación de semiconductores (las unidades son °*F*): 953, 950, 948, 955, 951 949, 957, 954, 955. Calcule:

   a). La media muestral de estos datos.

   b). La mediana muestral de estos datos.

   c). ¿En cuánto puede incrementarse la mayor medición de temperatura sin que cambie la mediana muestral?

4. Haga un cuadro comparativo de las ventajas y desventajas de la mediana, la moda y la media aritmética.

5 Con los datos de las calificaciones del Cuadro 1, calcule:

a). el rango
b). la varianza
c). la desviación estándar
d). la desviación media absoluta
e). el coeficiente de variación